10. Übung "Graphen in und aus der Ebene" SoSe 2014

Stefan Felsner — Aufgaben für Di. 24. Juni

---

(1) Beweise den folgenden Satz (Helly für Halbräume): Sind $H_1^+, \ldots, H_n^+$ Halbräume in $\mathbb{R}^d$ sodass je $d+1$ der Halbräume einen nichtleeren Durchschnitt haben, dann gibt es einen Punkt p in $\bigcap_1^n H_i^+$.

(2) Beweise den folgenden Satz (Existenz von *Centerpoints*): Sei P eine Menge von n Punkten im $\mathbb{R}^d$. Es existiert ein $z \in \mathbb{R}^d$ so dass jeder Halbraum H^+ der z enthält mindestens $\frac{n}{d+1}$ Punkte von P enthält.

(3) Sei K die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$. Auf K seien n Punkte gegeben. Der Centerpoint z dieser Punktmenge liegt offenbar im Inneren von K. Um z in den Mittelpunkt $\mathbf{0}$ von K zu bekommen gehe wie folgt vor:

Definiere Nordpol N und Südpol S von K als Durchstoßpunkt der Geraden, die von z und $\mathbf{0}$ aufgespannt wird.

Betrachte die Tangentialebene E an K in S (wir identifizieren E und $\mathbb{R}^2$) und die stereographische Projektion $\Gamma : E \to K$ mit Zentrum N.

Sei γ_a die zentrische Streckung mit Faktor a. Zeige dass es ein a gibt, so dass $\Gamma \circ \gamma_a \circ \Gamma^{-1}$ das Gewünschte leistet.

(4) Sei K die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$. Sei C eine Kugelkappe auf K und r der Radius des Randkreises ∂C. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dafür dass eine zufällig gewählte Ebene die $\mathbf{0}$ enthält, die Kappe C schneidet, genau r ist.

Hinweis: Die Ebene wird am besten als Normalenebene zu einem gleichverteilt auf K gewählten Punkt beschrieben.

(5) Sei $C_1, \ldots, C_n$ eine Menge von disjunkten Kugelkappen und r_i der Radius von ∂C_i. Es gilt:

- $\sum_i \pi r_i^2 \leq 4\pi$.
- $n \sum_i r_i^2 \geq (\sum_i r_i)^2$.

(6) Baue die in den ersten Übungsaufgaben bereitgestellten Bestandteile zu einem Beweis des folgenden Separator-Theorems zusammen:

Satz: Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit n Knoten. Dann existieren Teilmengen A, B, S von V mit $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$, keine Kante verbindet $A \setminus S$ und $B \setminus S$, $|A|, |B| \leq \frac{3}{4}n$ und $|S| \leq 2\sqrt{n}$.