# 1. Übung "Graphen in und aus der Ebene" SoSe 2014

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 21. April

(1) Jeder Graph kann in $\mathbb{R}^3$ kreuzungsfrei gezeichnet werden.
Entdecke Möglichkeiten diesen kleinen Satz zu beweisen. Geht es auch mit geraden Kanten (Segmenten) oder wenn alle Kanten Halbkreisbögen sind?

(2) Ein *Sunkist-Graph* ist ein Graph mit einer kreuzungsfreien Zeichnung bei der die Knoten auf dem Rand eines Tetraeders liegen und die Kanten gerade sind (Segmente). Zeige:

- Jeder 4-färbbare Graph ist ein Sunkist-Graph.
- Nicht jeder Graph kann als Sunkist-Graph dargestellt werden.
- Wie viele Kanten kann ein Sunkist-Graph mit $n$ Knoten haben?

(3) Finde einen 3-kantenzusammenhängenden planaren Graphen $G$ dessen Dualgraph nicht eindeutig ist.

(4) Sei $G$ ein planarer Graph und $G^*$ ein Dual von $G$. Zeige, dass $G$ oder $G^*$ einen Knoten vom Grad höchstens 3 besitzt.

(5) Zeige: Ein planarer Graph ist bipartit (2-färbbar), genau wenn alle dualen Knoten geraden Grad haben.

(6) Zeige: Jede Zeichnung des $K_{3,3}$ hat ein paar nicht-adjazenter Kanten (unabhängiger Kanten) deren darstellende Kurven sich ungerade oft schneiden.

(7) Je zwei geschlossene Kurven in der Ebene, die nur endlich viele Punkte gemeinsam haben, kreuzen sich gerade oft.

(8) Ein *Polyomino* ist eine Menge von Quadraten aus dem Quadratgitter, deren internes Dual (das Dual ohne den Dualknoten der unbeschränkten Fläche) zusammenhängend ist. Polyominos die durch Translationen, Rotationen und Spiegelungen zur Deckung gebracht werden können gelten als gleich.

- Wie viele Pentominos (Polyominos die aus 5 Quadraten bestehen) gibt es?
- Sei $P(n)$ die Anzahl der Polyominos mit $n$ Quadraten. Wie schnell wächst $P(n)$ mit $n$?

(9) Zeige 1) $K_5$ hat keine 2-Basis. 2) $G$ hat 2-Basis $\Longrightarrow$ $G - e$ hat 2-Basis. (Das sind die beiden fehlenden Versatzstücke zum Beweis des Satzes von MacLane.)