14. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**
Graphentheorie (DS II) 30. Januar 2020
Besprechungsdatum: 05./06. Februar
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII19.html`

Dies ist das letzte Blatt. Insgesamt sind dieses Semester also 61 Punkte erreichbar.

(1)

(a) Finde einen Graphen G, sodass $\chi_f(G) > \frac{n}{\alpha(G)}$.

(b) Sei G ein einfacher Graph. Beweise:

$$\chi(G) = 2 \Leftrightarrow \chi_f(G) = 2.$$

(2) Ein Graph $G = (V, E)$ heißt knoten-transitiv, falls gilt: Für je zwei Knoten $u, v \in V$ existiert ein Automorphismus $\phi \colon V \to V$ mit $\phi(u) = v$.

(a) Zeige, dass Kneser-Graphen knoten-transitiv sind.

(b) Sei G ein knoten-transitiver Graph auf n Knoten. Zeige:

$$\chi_f(G) = \frac{n}{\alpha(G)}.$$

(c) Finde nicht knoten-transitiven Graphen, für die gilt: $\chi_f(G) = \frac{n}{\alpha(G)}$.

(3) Beweise Fekete's Lemma:
Sei $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ eine subadditive Funktion. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$ und ist gleich dem Infimum $\inf \frac{f(n)}{n}$ für $n \geq 1$.

(4) Eine Frage von Borsuk (um 1932) lautete: "Lässt sich jede beschränkte Menge im $\mathbb{R}^d$ in $d+1$ Teilmengen zerlegen, sodass jede Teilmenge echt kleineren Durchmesser hat?"

(a) Zeige, dass die Antwort für endliche Mengen im $\mathbb{R}^2$ ja ist.
[Hinweis: Dies ist ein Färbungsproblem geometrischer Thrackle.]

(b) Zeige, dass $d+1$ Teile notwendig sind, dass es also für jedes d eine Menge gibt, die sich nicht in d Teile niedrigeren Durchmessers zerlegen lässt.

[Heutzutage ist bekannt, dass die Frage im Allgemeinen mit "Nein" zu beantworten ist. Es existieren Gegenbeispiele ab $d = 65$.]