13. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**
Graphentheorie (DS II) 23. Januar 2019
Besprechungsdatum: 30./31. Januar
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII19.html`

---

(1) Weitere dreiecksfreie Graphen mit großer Färbungszahl:
Betrachte den folgenden *Shift-Graphen* $S(2,n)$. Die Knoten von $S(2,n)$ sind die Paare (a,b) von natürlichen Zahlen $1 \leq a < b \leq n$ mit Kanten $(a,b)(b,c)$. Zeige, dass $\chi(S(2,n)) \geq \log_2 n$.
[Hinweis: Für eine Färbung von $S(2,n)$ sei $\mathcal{F}_b$ die Menge aller Farben, die für Knoten der Art (a,b) verwendet werden.]

(2) Beweise oder widerlege:

(a) Sei G ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann hat G eine zulässige k-Färbung, in der eine Farbklasse $\alpha(G)$ Knoten besitzt.

(b) Falls G zusammenhängend ist, gilt: $\chi(G) \leq d_G + 1$ wobei d_G den Durchschnittsgrad bezeichnet.

(c) Der oben definierte Graph $S(2,n)$ hat eine unabhängige Menge der Größe $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

(3) Noch mehr dreiecksfreie Graphen mit großer Färbungszahl:
Einen der ersten Beweise hat Tutte mit Hilfe der folgenden Graphen geführt. Für ein gegebenen dreiecksfreien Graphen G_k mit $\chi(G_k) \geq k$ und n Knoten, besteht der Graph G_{k+1} aus einer Knotenmenge X der Größe $k(n-1)+1$ und für jede Teilmenge $Y \subset X$ mit $|Y| = n$ einer Kopie von G_k, die mit Y durch ein perfektes Matching verbunden ist. Zeige, dass G_{k+1} dreiecksfrei ist und $\chi(G_{k+1}) \geq k + 1$.

(4) Gegeben sei eine Menge von Geraden in der Ebene, von denen sich keine drei Geraden in einem Punkt schneiden. Seien die Schnittpunkte der Geraden die Knoten eines Graphen G. Zwei Knoten sind adjazent sofern die dazugehörigen Punkte auf einer Geraden direkt aufeinander folgen. Zeige $\chi(G) \leq 3$.