7. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**
Graphentheorie (DS II) 28. November 2019
Besprechungsdatum: 3./5. Dezember
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII19.html`

---

(1) Sei $N = (V, E)$ ein Netzwerk mit Widerstand $r_e > 0$ für jede Kante $e \in E$.

(a) Seien f ein Fluss mit Quellstärken $\{q_v\}$ und f' ein Fluss mit Quellstärken $\{q'_v\}$. Zeige, dass $(f + f')$ ein Fluss zu Quellstärken $\tilde{q}_v := q_v + q'_v$ ist.

(b) Folgere, dass ein Fluss in einem Netzwerk mit gegebenen Widerständen und Quellstärken eindeutig ist.

(2) Dualgraphen planarer Graphen

(a) Finde einen planaren Graphen G mit $\kappa'(G) \geq 3$ (ohne Mehrfachkanten und Schlaufen), dessen Dualgraph nicht eindeutig ist.

(b) Finde zwei verschiedene planare Graphen G_1 und G_2 mit $G_1^* = G_2^*$.

(c) Sei G ein planar eingebetter Graph. Zeige, dass wenn $\kappa(G^*) \geq 2$ dann hat G höchstens eine Komponente, die kein Baum ist.

(3) Ein einfacher planarer Graph $G = (V, E)$ ist eine *Triangulierung*, falls eine Zeichnung existiert, sodass der Grad jeder Fläche 3 ist (auch der äußeren Fläche).

(a) Jeder einfache planare Graph mit $n \geq 3$ Knoten ist Subgraph einer Triangulierung mit n Knoten.

(b) Jeder einfache planare Graph ist induzierter Subgraph einer Triangulierung.

(c) Triangulierungen (mit mehr als 3 Knoten) sind 3-zusammenhängend.

(4) Eulerformel und Planarität

(a) Zeige, dass für alle Graphen G mit $n \geq 11$ Knoten G oder das Komplement von G nicht planar ist.

(b) Zeige, dass die in der Vorlesung gezeigte Eigenschaft, dass planare Graphen einen Knoten vom Grad ≤ 5 haben, bestmöglich ist, indem du einen planaren Graphen ohne Knoten vom Grad < 5 angibst.

(c) Zeige, dass die in der Vorlesung gezeigte Eigenschaft, dass bipartite, planare Graphen einen Knoten vom Grad ≤ 3 haben, bestmöglich ist, indem du einen planaren, bipartiten Graphen ohne Knoten vom Grad < 3 angibst.

(5) geradlinige Zeichnungen planarer Graphen

(a) Zeige, dass für alle $k \in \{3, 4, 5\}$ jedes k-Eck sternförmig ist.
[Ein k-Eck ist *sternförmig* wenn ein Punkt p existiert, so dass für alle Punkte q des k-Ecks gilt: Die Strecke pq liegt im k-Eck.]

(b) Folgere, dass jede Triangulierung eine geradlinige Zeichnung besitzt.
[Hinweis: Jeder planare Graph besitzt einen Knoten v mit $\deg(v) \leq 5$.]