6. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**

Graphentheorie (DS II) 21. November 2019

Besprechungsdatum: 28./29. November

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII19.html`

---

(1) Zeige die folgenden Eigenschaften des de Bruijn Graph $\mathcal{B}_n(m)$.

(a) Er enthält eine Menge von m kantendisjunkten Arboreszenzen. Kann es auch mehr geben?

(b) Er ist als ungerichteter Graph m-kantenzusammenhängend.

(c) Er ist als ungerichteter Graph m-knotenzusammenhängend.

(2) Eine *universelle de Bruijn-Folge* für n ist eine unendliche Folge von Zeichen $a_1, a_2, \ldots$ aus dem unendlichen Alphabet $\{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}_0$, sodass für alle m die ersten m^n Zeichen ein Memory Wheel, also eine de Bruijn-Folge, für Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0, \ldots, m-1\}$ sind. Zeige, dass es einen universellen de Bruijn Pfad für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt.
(Tipp: Finde eine Erweiterung der ersten m^n auf die ersten $(m+1)^n$ Zeichen der Folge durch Modellierung des Problems als Euler-Kreis-Problem auf einem gerichteten Graphen.)

(3) Endliche Körper, Polynome: Sei $\mathbb{F}_k$ ein endlicher Körper.

(a) Zeige, dass es ein Polynom von Grad 2 in $\mathbb{F}_k[x]$ gibt, das nicht in Linearfaktoren zerfällt (also irreduzibel ist).

(b) Sei $P \in \mathbb{F}_k[x]$ irreduzibel. Sei die Äquivalenzrelation

$$\sim_P : Q \sim_P Q' \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{F}_k[x] : Q - Q' = P \cdot R$$

mit Äquivalenzklassen $[Q] := \{Q' \in \mathbb{F}_k[x] : Q \sim_P Q'\}$ durch P gegeben. Zeige, dass $\mathbb{F}_k[x]/\sim_P := \{[Q] : Q \in \mathbb{F}_k[x]\}$ ein Körper ist.

(4) Eigenwerte von Graphen

(a) Bestimme die Eigenwerte (mit Vielfachheit) vom vollständigen Graphen K_n.

(b) Bestimme die Eigenwerte (mit Vielfachheit) vom vollständig bipartiten Graphen $K_{m,n}$.

(c) Finde einen oben nicht aufgeführten, zusammenhängenden Graphen mit höchstens 3 Eigenwerten.