5. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**

Graphentheorie (DS II) 14. November 2019

Besprechungsdatum: 21./22. November

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII19.html`

---

(1) Zeige Cayleys Formel mit Hilfe des Matrix-Baum-Satzes.

(2) Zusammenhang, Eulerkreise und Hamiltonkreise: Beweise oder widerlege:

   (a) Jeder Graph, der einen Hamiltonkreis besitzt, ist 2-zusammenhängend.

   (b) Jeder Graph, der einen Eulerkreis besitzt, ist 2-zusammenhängend.

   (c) Jeder Graph, der einen Hamiltonkreis besitzt, ist eulersch.

   (d) Jeder Graph, der einen Eulerkreis besitzt, ist hamiltonisch (besitzt also einen Hamiltonkreis).

   (e) Jeder 2-zusammenhängende Graph ist eulersch.

   (f) Jeder 2-zusammenhängende Graph ist hamiltonisch.

(3) Sei $f : V(\mathcal{B}_n) \to V(\mathcal{B}_{n-1})$ eine Abbildung der Knoten des de Bruijn Graph $\mathcal{B}_n$ auf die Knoten des $\mathcal{B}_{n-1}$, der $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{B}_n$ auf $(a_1{+}a_2, a_2{+}a_3, \ldots, a_{n-1}{+}a_n) \in \mathcal{B}_{n-1}$ mit der Addition von $\mathbb{F}_2$ (d.h. $1 + 1 = 0$) abbildet. Sei $C = (e_1, \ldots, e_{2^n})$ eine Eulertour in $\mathcal{B}_{n-1}$. Benutze f um C zweimal auf $\mathcal{B}_n$ zu liften, d.h. finde $C' = (e'_1, \ldots, e'_{2^n})$ und $C'' = (e''_1, \ldots, e''_{2^n})$ in B_n mit $f(C') = C = f(C'')$ und verwende C' und C'' um eine Eulertour des $\mathcal{B}_n$ zu konstruieren.

(4) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge V' der Knoten heißt *unabhängig* falls der knoteninduzierte Subgraph $G[V']$ kantenfrei ist. Ein Wort ist *wiederholungsfrei*, wenn kein Buchstabe zweimal vorkommt.
Sei $S_n(m)$ der *shift graph* auf den wiederholungsfreien Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0, \ldots, m{-}1\}$: Zwischen zwei Wörtern v und w existiert die gerichtete Kante (v, w) falls gilt $v = v_0, \ldots, v_{n-1}$ und $w = v_1, \ldots, v_n$.

   (a) Sei A eine unabhängige Menge in $S_{2k+1}(m)$.
   Zeige $|A| \leq \frac{k}{2k+1} \cdot (m)_{2k+1} = \frac{k}{2k+1} \cdot \frac{m!}{(m-2k-1)!}$.

   (b) Für welche Parameter n, m ist $S_n(m)$ eulersch?