2. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**
Graphentheorie (DS II) 24. Oktober 2019

Besprechungsdatum: 31. Oktober/1. November
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII19.html`

---

(1) Verschiedenes

(a) Existieren einfache Graphen mit streng monotonen Gradfolgen und mindestens 2 Knoten?

(b) Ein k–*regulärer* Graph ist ein Graph, dessen Knoten alle Grad k haben. Wie viele 3–reguläre Graphen mit 1,2,. . . ,8 Knoten gibt es?

(c) Zeigen Sie, dass die Ungleichung $\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\,\mathrm{rad}(G)$ bestmöglich ist, indem Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ und beide Ungleichungen je einen Graphen G mit $\mathrm{rad}(G) = k$ angeben, der diese mit Gleichheit erfüllt.

(2) Gradfolgen

(a) Zeige, dass $(d_1, ..., d_n)$ mit $d_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ genau dann die Gradfolge eines Baumes ist, wenn $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

(b) Seien $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ natürliche Zahlen. Zeige, dass ein Graph G mit $d_k + 1$ Knoten existiert, sodass $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ die Menge der Grade in G beschreibt.

(3) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = [n] := \{1, ..., n\}$. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Wenn G einen **Zykel** ungerader Länge besitzt, dann hat G auch einen **Kreis** ungerader Länge.
[Ein Zykel ist ein geschlossener Kantenzug, ein Kreis ein Zykel, der keinen Knoten doppelt besucht.]

(b) Sei A die Adjazenzmatrix von G, also $A \in \{0, 1\}^n$ mit Einträgen $a_{i,j} = 1$ genau dann, wenn $ij \in E$. Zeige, dass es genau dann einen Kantenzug der Länge k von $u \in V$ nach $v \in V$ gibt, wenn der Eintrag $a^k_{u,v} \neq 0$ ist.
[$a^k_{u,v}$ bezeichnet den Eintrag der Matrix A^k in der mit u assoziierten Zeile und v assoziierten Spalte.]

(4) Zusammenhang

(a) Beweise oder widerlege: Falls $u \in V$ und $v \in V$ die einzigen Knoten ungeraden Grades in G sind, dann enthält G einen u,v-Pfad.

(b) Sei H_d der d–dimensionale Hyperwürfel. Zeige $\kappa(H_d) = d$.