13. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Kleist**

Graphentheorie (DS II) 24. Januar 2018

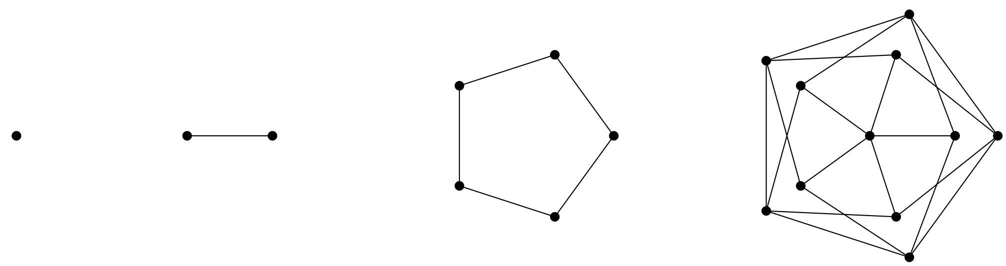
Besprechungsdatum: 30. Januar

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII17.html`

---

(1) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, in dem es keine drei Knoten u, v, w gibt mit der Eigenschaft $(u, v) \in E, (v, w) \in E$ und $(u, w) \notin E$. Zeige, dass G ein vollständiger Graph ist.

(2) Dies sind die Mycielski Graphen M_i für $i \in [4]$.



M_1 M_2 M_3 M_4

(a) Gib eine abstrakte Definition des Mycielski-Graphen M_k an.

(b) Zeige, dass die Mycielski Graphen dreiecksfrei sind.

(c) Zeige, dass jede Färbung des Mycielski Graph M_k mindestens k Farben verwendet, d.h., $\chi(M_k) \geq k$.

(3) Beweise oder widerlege:

(a) Sei G ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann hat G eine zulässige k-Färbung, in der eine Farbklasse $\alpha(G)$ Knoten besitzt.

(b) Falls G zusammenhängend ist gilt: $\chi(G) \leq d_G + 1$ wobei d_G den Durchschnittsgrad bezeichnet.

(4) Weitere dreickesfreie Graphen mit großer Färbungszahl. Bearbeite (a) oder (b).

(a) Betrachte den folgenden *Shift-Graphen* S_n. Die Knoten von S_n sind die Paare (a, b) von natürlichen Zahlen $1 < a < b \leq n$ mit Kanten $(a, b)(b, c)$. Zeige, dass $\chi(S_n) \geq \log n$.
[Hinweis: Für eine Färbung von S_n, sei $\mathcal{F}_b$ die Menge aller Farben, die für Knoten (a, b) verwendet werden.]

(b) Eine der ersten Beweise hat Tutte mit Hilfe der folgenden Graphen geführt. Für ein gegebenen dreiecksfreien Graphen G_k mit $\chi(G_k) \geq k$ und n Knoten, besteht der Graph G_{k+1} aus einer Knotenmenge X der Größe $k(n-1)+1$ und für jede Teilmenge $Y \subset V$ mit $|Y| = n$ einer Kopie von G_k, die mit Y durch ein perfektes Matching verbunden ist. Zeige, dass G_{k+1} dreiecksfrei ist und $\chi(G_{k+1}) \geq k + 1$.