12. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Kleist**
Graphentheorie (DS II) 17. Januar 2018
Besprechungsdatum: 23. Januar
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII17.html`

---

(1) Sei $G = (V, E)$ Graph. Die Wei-Ungleichung besagt $\alpha(G) \geq \sum_v \frac{1}{d_v+1}$. Beweise die Ungleichung mit Hilfe des MAX-Algorithmus aus der Vorlesung. Betrachte dazu $A(G) := \sum_{v \in G} \frac{1}{d_v+1}$, x ein Knoten maximalen Grades in G und $G' := G[V \setminus x]$.

(2) Sei $R(G, H)$ die kleinste natürliche Zahl bei der jede rot/blau–Färbung der Kanten des K_R entweder einen roten Subgraphen G oder einen blauen Subgraphen H enthält.

(a) Ermittle $R(K_{1,m}, K_{1,n})$.

(b) Zeige, $R(C_4, C_4) = 6$.

(3) Seien $s, t \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und T ein Baum mit t Knoten. Sei $R(T, K_s)$ die kleinste natürliche Zahl R, bei der jede rot/blau–Färbung der Kanten des K_R entweder einen roten Subgraphen T oder einen blauen Subgraphen K_s enthält.
Zeige: $R(T, K_s) = (s - 1)(t - 1) + 1$.

[Hinweis: Induktion über s.]

(4) Finde eine Punktemenge P mit 8 Punkten in allgemeiner Lage ohne konvexe 5-Teilmenge. Daraus folgt $N(5) \geq 9$.

(5) Beweise ein Erdős-Szekeres-Theorem in d Dimensionen: Für jedes k existiert $N(k)$, so dass alle Punktmengen in $\mathbb{R}^d$ mit $N(k)$ Punkten in allgemeiner Lage eine k-elementige konvexe Punktmenge enthalten.

(6) Sei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene.

(a) Jeder Punkt in P ist entweder rot oder blau gefärbt. Ein *einfarbiges leeres Dreieck* ist eine Menge von 3 Punkten einer Farbe, deren konvexe Hülle leer ist. Zeige, dass P ein einfarbiges leeres Dreieck enthält, falls $|P|$ groß genug ist. Wie groß ist groß genug?

(b) Zeige, dass es mindestens $\binom{|P|-1}{2}$ leere Dreiecke in P gibt.