10. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Kleist**

Graphentheorie (DS II) 21. Dezember 2017

Besprechungsdatum: 9. Januar

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII17.html`

---

(1) Kreiskontaktdarstellungen

(a) Verwende Kreiskontaktdarstellungen um zu zeigen, dass jeder planare Graph eine geradlinige Zeichnung besitzt.

(b) Welche Eigenschaften kann man mit Hilfe von orthogonalen Kreiskontaktdarstellungen für geradlinige Zeichnungen erhalten?

(2) Verallgemeinerte Kreiskontaktdarstellung

(a) Sei T eine innere (2-zshg.) Triangulierung, bei der die äussere Fläche k Knoten besitzt. Zeige, dass T eine Kreiskontaktdarstellung besitzt, in der die äusseren Knoten ein konvexes Polygon mit k Ecken bilden dessen Winkel fest vorgegeben sind (und natürlich die korrekte Winkelsumme eines k-Ecks erfüllen).
Hinweis: Verallgemeinere den Beweis aus der Vorlesung und betrachte

$$n_I \cdot 2\pi + \sum_{v \in D_O} \alpha(v) = \sum_{v \in D} \alpha(v) \leq (2n_D - n_O - 2)\pi + \varepsilon$$

(b) Kann man auch ein äusseres Viereck v_1, v_2, v_3, v_4 vorgeben mit einem Winkel $\alpha_2 > \pi$ bei v_2, wenn die Knoten v_1 und v_3 nicht benachbart sind?

(3) Satz von Helly

(a) Zeige, den Satz von Helly für $d = 1$ ohne Verwendung linearer Algebra.

(b) Zeige, den Satz von Helly.

(4) In dieser Aufgabe verwenden wir das planare Separatortheorem um gewichtsmaximale Matchings zu berechnen. Sei $G = (V, E)$ ein $w : E \to \mathbb{R}$ gegebene Kantengewichte. Wir suchen ein Matching M maximalem Gewichts $w(M) := \sum_{e \in M} w(e)$.

(a) Sei M ein Matching. Wir nennen einen Weg oder Kreis P *verbessernd* wenn P alternierend ist (dass heisst die Kanten sind abwechselnd aus M und E/M), $M' := M \backslash P + P \backslash M$ ein Matching ist, und $w(M') > w(M)$.
Zeige, dass ein Matching M genau dann maximales Gewicht hat wenn kein verbessernder Weg/Kreis existiert.

(b) Zeige die folgende Aussage. Sei M ein gewichtsmaximales Matching in $G - v$ und P ein maximaler verbessernder Weg mit Startknoten v. Dann ist das Matching $M' := M \backslash P + P \backslash M$ ein maximales Matching in G.

(c) Sei G planar. Entwickle einen Algorithmus zur Berechnung einen gewichtsmaximalen Matchings mit Laufzeit $T(n) \leq 2T(\frac{3}{4}n) + c\sqrt{n}B(n) + C(n)$, wobei die Laufzeit zur Suche eines erhöhenden Wegs mit festen Startknoten durch $B(n)$ und eines Separators durch $C(n)$ beschrieben werden. Was ist $T(n)$?

[Hinweis: Es gibt Linearzeit-Algorithmen zur Berechnung von Separatoren in planaren Graphen.]

Frohe Weihnachten
&
Guten Rutsch