**8. Übungsblatt zur Vorlesung:** **Felsner/ Kleist**
**Graphentheorie (DS II)** 06. Dezember 2017
Besprechungsdatum: 13. Dezember
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII17.html`

---

(1) Duale Matroide

(a) Beweise: Wenn $G$ planar ist, dann ist $M^*(G)$ graphisch.
[Hinweis: Betrachte $M(G^*)$.]

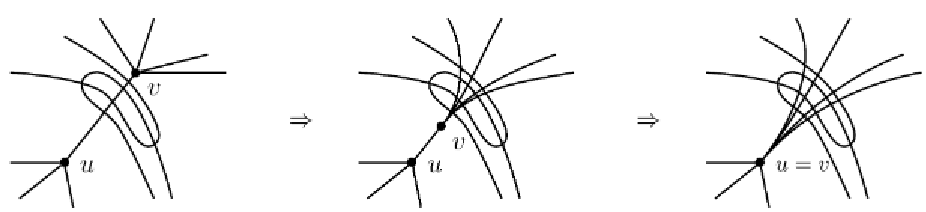
(b) Zeige, dass $M^*(K_5)$ nicht graphisch ist.
[Hinweis: Angenommen, es existiert Graph $H$ mit $M(H) = M^*(K_5)$. Betrachte den Minimalgrad von $H$.]

(c) Folgere Whitney's Planaritätskriterium mit Hilfe eines geeigneten Satzes aus der Vorlesung: $G$ ist planar genau dann wenn $M^*(G)$ graphisch.

(2) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeige, dass $H = (V_H, E_H)$ ein Minor von $G$ ist genau dann wenn eine Partition $V_0, V_1, \ldots, V_k$ von $V$ existiert sodass der induzierte Subgraph $G[V_i]$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ zusammenhängend ist und eine Bijektion zwischen $\{1, \ldots, k\}$ und $V_H$ existiert mit $(v_i, v_j) \in E_H \implies \exists u \in V_i, v \in V_j : (u, v) \in E$.

(3) Zeige mit Hilfe des Satzes von Kuratowski, dass der Petersengraph nicht planar ist.

(4) Zeige die folgende (schwächere) Variante von Hanani-Tutte mit Induktion über die Anzahl an Kanten und der im Bild angedeuteten Idee:
Wenn eine Zeichnung $D$ eines Multigraphen $G$ exisitiert, in der sich jedes Kantenpaar gerade oft schneidet, dann ist $G$ planar (und es existiert eine planare Zeichnung $D'$ mit dem gleichen Rotationssystem wie in $D$).




[Hinweis: Der Induktionsanfang ist nicht trivial. Dieser Beweis von Pelsmajer et. al. basiert nicht auf dem Satz von Kuratowski.]