7. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Kleist**
Graphentheorie (DS II) 28. November 2017
Besprechungsdatum: 05. Dezember
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII17.html`

---

(1) In der letzten Übung haben wir verschiedene Ideen von *gleichen* Zeichnungen planarer Zeichnungen kennengelernt. Wir nennen zwei Zeichnungen eines planaren Graphen *d-isomorph* wenn die Dualgraphen isomorph sind. Ein *Rotationssystem* beschreibt die Kombinatorik einer Zeichnung durch die zyklische Reihenfolgen der inzidenten Kanten eines jeden Knoten. Wir nennen zwei Zeichnungen eines planaren Graphen *r-isomorph* wenn (es eine Benennung der Knoten und Kanten gibt sodass) die Rotationssysteme übereinstimmen.
Zeige, dass die beiden Begriffe verschieden sind und einer der Begriffe stärker ist.

(2) Sei $(X, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem, aber kein Matroid. Zeige, dass es eine Gewichtsfunktion $\omega : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, sodass der Greedy-Algorithmus keine unabhängige Menge maximalen Gewichts zurück gibt.

(3) Sei $X_1, \ldots, X_t$ eine Partition von einer Menge X und $r_1, \ldots, r_t$ gegebene Zahlen. Wir definieren $Y \subset X$ als unabhängig, wenn $|Y \cap X_i| \leq r_i$ für alle $i \in [r]$. Sei $\mathcal{I}$ die Menge aller unabhängigen Mengen von X. Zeige dass der *Partitionsmatroid* $(X, \mathcal{I})$ ein linearer Matroid ist.

(4) Transversal- und Matching-Matroide

(a) Sei X eine endliche Menge und $T_1, \ldots, T_\ell \subseteq X$. Wir definieren $A \subseteq X$ als *unabhängig* wenn eine injektive Funktion $\pi : A \to [l]$ existiert so, dass $a \in T_{\pi(a)}$ für alle $a \in A$. Sei $\mathcal{I}$ die Menge aller unabhängigen Mengen von X. Zeige, dass $(X, \mathcal{I})$ ein Matroid ist. Matroide dieser Form heißen *transversal*.
[Hinweis: Betrachte den bipartiten Graphen G mit Partitionsklassen X und $\{T_1, \ldots, T_\ell\}$, sowie Kanten (a, T_i) falls $a \in T_i$.]

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wir definieren $U \subset V$ als unabhängig, wenn ein Matching in G existiert, dass U überdeckt. Sei $\mathcal{I}$ die Menge aller unabhängigen Mengen von V. Zeige, dass $(V, \mathcal{I})$ ein Matroid ist. Matroide dieser Form heißen *Matching-Matroide.*
[Hinweis: Für $I, J \subset V$ mit $|I| < |J|$ und überdeckenden Matchings M_I,M_J, betrachte einen Knoten aus J der nicht von M_I überdeckt wird.]

(5) Transversale Matroide

(a) Untersuche den Zusammenhang von transversalen Matroiden, uniformen Matroiden und Partitions-Matroiden.

(b) Zeige, dass transversale Matroide nicht $\mathbb{F}_2$-linear, aber $\mathbb{R}$-linear sind.
[Hinweis: Es gibt überabzählbar viele algebraisch unabhängige Zahlen.]