5. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Kleist**
Graphentheorie (DS II) 15. November 2017
Besprechungsdatum: 21. November
`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII17.html`

---

(1) Zeige Cayley's Formel mit Hilfe des Matrix-Baum-Satzes.

(2) Sei G ein ungerichteter Graph und $\vec{G}$ der Graph G mit einer beliebigen aber festen Orientierung. N sei die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix von $\vec{G}$, $\hat{N}$ sei N nach Streichen der ersten Zeile. Für $F \subseteq E$ bezeichnet $\hat{N}_F$ die Einschränkung von $\hat{N}$ auf die zu F korrespondierenden Spalten. Zeige die ungerichtete Version des Matrix-Baum-Satz mit folgenden Schritten:

(a) Zeige, dass gilt

$$\det\big(L'(G)\big) = \det(\hat{N} \cdot \hat{N}^{\mathsf{T}}) = \sum_{F:|F|=n-1} \Big(\det \hat{N}_F\Big)^2$$

[Hinweis: Verwende die Cauchy-Binet-Formel. Für eine $n \times m$-Matrix A und eine $m \times n$-Matrix B gilt: $\det(A \cdot B) = \sum_{S \subseteq \binom{[m]}{n}} \det(A_S \cdot B_S)$, wobei für eine Menge $S \subset [m]$, A_S (bzw. B_S) die Einschränkung von A (bzw. B) auf die Spalten (bzw. Zeilen) mit Index aus S bezeichnet.]

(b) Sei $F \subset E$ mit $|F| = n - 1$. Zeige dass

$$\det \hat{N}_F = \pm 1$$

genau dann gilt wenn F die Kantenmenge eines Baumes ist. Was gilt sonst?

(3) Eulerpfade, Eulerkreise und Hamiltonkreise

(a) Zeige, dass es in jedem zusammenhängenden Graphen einen Kantenzug gibt, der jede Kante genau zweimal enthält.

(b) Finde einen Graphen G, der Eulersch aber nicht Hamiltonisch ist und einen Graphen H, der Hamiltonisch aber nicht Eulersch ist.

(4) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es das Haus vom Nikolaus zu zeichnen?

(5) Zeige die folgenden Eigenschaften des de Bruijn Graph $\mathcal{B}_n(m)$.

(a) Er enthält eine Menge von m kantendisjunkten Arboreszenzen. Kann es auch mehr geben?

(b) Er ist als ungerichteter Graph m-kantenzusammenhängend.

(c) Er ist als ungerichteter Graph m-knotenzusammenhängend.