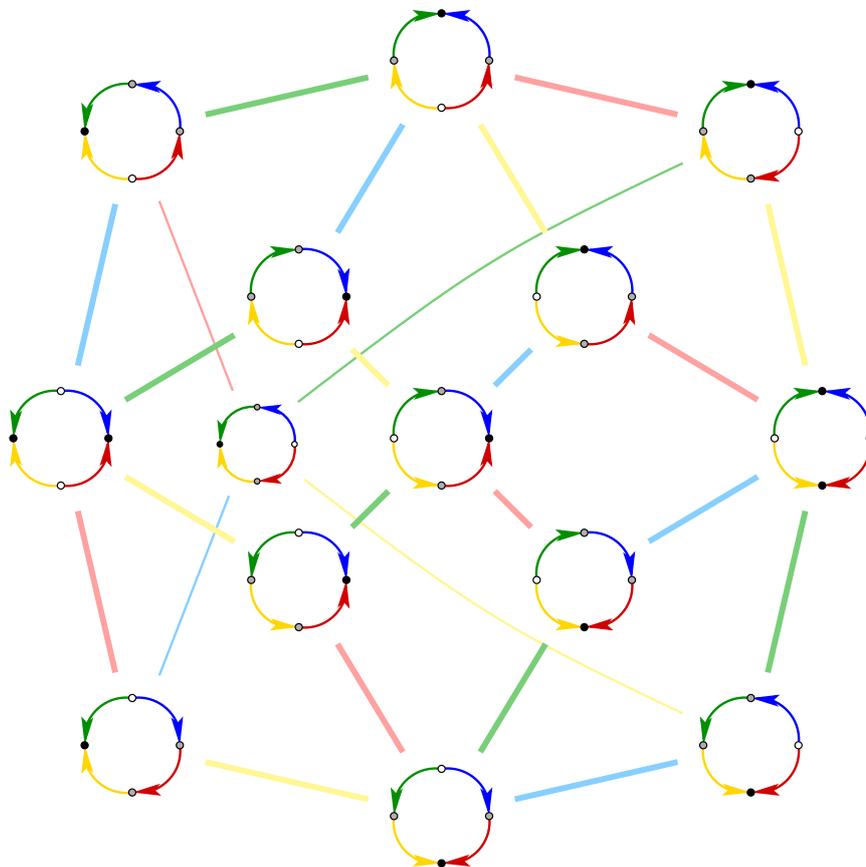


Graphentheorie

Teilnehmerskript

zu einer Vorlesung von
Stefan Felsner
Wintersemester 2013/14
Technische Universität Berlin



Die 14 azyklischen Orientierungen des 4-Kreises.

Vorwort

Die Idee ein Skript zu meiner Vorlesung Graphentheorie im WS13/14 zu erstellen kam von den Studierenden. Dass Studierende saubere Mitschriften erstellen und sich diese gegenseitig zur Verfügung stellen, ist normal und immer schon passiert. Relativ neu ist, dass die Produkte ueber das Internet allgemein verfügbar gemacht werden. Man findet da einiges von unterschiedlicher Machart. Ich war der Meinung, dass ein Skript nur sinnvoll ist wenn es einheitlich von guter Qualität ist und erklärte mich bereit mitzumachen. In einem kurzen Text mit Hinweisen schrieb ich: *„Die Erstellung eines Skriptkapitels ist eine sinnvolle Übung. Sie bekommen ein tieferes Verständnis der Inhalte der bearbeiteten Vorlesung. Sie üben das Erstellen mathematischer Texte mit \LaTeX . Sie werden das noch öfter brauchen. Wenn wir uns alle Mühe geben wird ein Skript entstehen auf das wir alle stolz sind.“* Als Stilvorlage und Beispiel schrieb ich ein Kapitel zu einer nicht gehaltenen Vorlesung. Diese Kapitel steht als VL 33 am Ende dieses Textes.

Von den etwa 50 Teilnehmern an der Vorlesung haben sich 16 aktiv an der Erstellung des Skripts beteiligt. Die Beiträge dieser Studierenden habe ich auch alle noch einmal gründlich redigiert. Teilweise bestand dieses Redigieren nur darin, dass ich meine eigenen Formatierungsvorstellungen und Formulierungsvorlieben über den vorhandenen Text gestülpt habe. In einigen Fällen musste ich aber auch ganze Teile neu schreiben. Letztendlich war es mehr Arbeit für mich als ich gehofft hatte. Andererseits bin ich jetzt doch stolz auf das Ergebnis und freue mich, dass es entstanden ist. Mein Dank an alle die dazu beigetragen haben, insbesondere an Andre Weltsch, der als Koordinator und Motor für das Projekt eine besondere Rolle gespielt hat.

Stefan Felsner
Berlin, 22. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen I	1
1.1 Anstoß: 3 Probleme	1
1.2 Einleitung und grundlegende Definitionen	2
1.3 Lösung von Problem 1	4
2. Grundlagen II	6
2.1 Lösung von Problem 2	7
2.2 Lösung Problem 3	10
2.3 Starrheit allgemein	11
3. Gradfolgen, Wege und Kreise	12
3.1 Gradfolgen	12
3.2 Charakterisierung von Havel und Hakimi	12
3.2.1 Der Flipgraph der 2-Switches	13
3.2.2 Erdős–Gallai Charakterisierung von Gradfolgen	14
3.3 Wege und Kreise	15
4. Zusammenhang und Satz von Menger	17
4.1 Zusammenhang	17
4.2 Intern disjunkte p - q -Wege und Satz von Menger	18
4.2.1 8 Varianten des Satzes von Menger	19
4.2.2 $\kappa(G)$ vs. $\kappa'(G)$	20
5. r-partite Graphen, Wälder und Bäume	21
5.1 r -partite Graphen	21
5.2 Wälder und Bäume	23
5.2.1 Allgemeines und Charakterisierung von Bäumen	23
6. Bridg-It und die Cayley-Formel	27
6.1 Bridg-It: Eine Anwendung aufspannender Bäume	27
6.2 Die Cayley-Formel: Aufspannender Bäume des K_n	29
7. Eulerkreise, \mathbb{F}_2- und \mathbb{R}-Vektorräume eines Graphen	34
7.1 Eulerwege und -kreise	34
7.2 \mathbb{F}_2 - und \mathbb{R} -Vektorräume eines Graphen	36
8. Matrix-Baum-Theorem	42

9. Memory Wheels und das BEST-Theorem	45
9.1 Memory Wheels und de Bruijn Graphen	45
9.2 Zählen von Eulerkreisen in gerichteten Graphen	47
9.3 Eigenwertversion des Matrix-Baum-Satzes	49
10. BEST-Theorem und Eigenwerte der Adjazenzmatrix	51
10.1 Eigenwerte der Adjazenzmatrizen	54
11. Extremale Graphentheorie	56
11.1 Wichtige Parameter eines Graphen	56
11.2 Obere Schranke für $ E $ für K_k -freie Graphen	57
12. Extremale Graphentheorie II	62
12.1 Eine Schranke für die Unabhängigkeitszahl α	64
13. Mehr zu $\alpha(G)$ und Ramsey-Theorie	67
13.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie kurzgefasst	67
13.2 Ein stochastischer Beweis der Schranke an $\alpha(G)$	68
13.3 Ramsey Theorie	70
14. Ramsey-Theorie auf Graphen	73
14.1 Ramsey-Theorie auf Graphen	73
14.2 Eine Anwendung in der Geometrie	76
15. Konvexe Mengen in der Ebene	78
15.1 Schranken an $N(n)$ mit Ramsey	78
15.2 Bessere obere Schranke	79
16. Kreuzungszahlen	83
16.1 Einführung Kreuzungszahlen	83
16.2 Kreuzungszahlen: geradlinige Zeichnung vs. allgemeine Zeichnung	84
16.3 Untere Schranken von Kreuzungszahlen	85
16.4 Anwendung: Einheitsabstände	87
HT. Der Satz von Hanani-Tutte und die Moon-Konstruktion	89
HT.1 Satz von Hanani-Tutte	89
HT.2 Moon-Konstruktion	94
17. Hamilton Kreise	96
17.1 Hamilton Kreise	96
18. Hamiltonscher Abschluss und Färbungen	99
18.1 Hamiltonscher Abschluss	99
18.2 Färbungen	100

19. Färbungen und Orientierungen	104
19.1 Greedy-Färbungen und k -Degeneriertheit	104
19.2 Färbungen und Orientierungen	106
19.3 Der Satz von Brooks	107
20. Schranken und Kantenfärbungen	109
20.1 Minoren und Unterteilungen	109
20.2 Kantenfärbungen (chromatischer Index)	111
20.3 Perfekte Graphen	114
21. Kantenfärbungen	116
21.1 Der Satz von Vizing	116
21.2 Listenfärbungen	118
21.2.1 Listenfärbungen bipartiter Graphen	118
22. Kantenfärbungen	120
22.1 Listenfärbungen und Kerne	120
22.2 Kantenlistenfärbungen	121
22.2.1 Der Satz von Galvin	121
22.3 Färbungen, Orientierungen und Polynome	122
22.3.1 Das Graph-Polynom und Färbbarkeit	122
22.3.2 Die Koeffizienten und Orientierungen	122
23. Listenfärbungen und der Satz von Alon–Tarsi	125
24. Listenfärbungen und perfekte Graphen	128
24.1 Eine Anwendung des Satzes von Alon-Tarsi	128
24.2 Eine andere Anwendung des kombinatorischen Nullstellensatzes	129
24.3 Perfekte Graphen	130
24.3.1 Chordale Graphen (Triangulierte Graphen)	130
25. Chordale Graphen	132
25.1 Durchschnittsgraphen	133
26. Perfekte Graphen	135
26.1 Weitere Klassen perfekter Graphen	136
26.1.1 Vergleichbarkeitsgraphen	136
26.1.2 Unvergleichbarkeitsgraphen	137
26.2 Berge Vermutungen	138
27. Polytop der unabhängigen Mengen	141
27.0.1 Das fehlende Lemma	141
27.1 Das Polytop der unabhängigen Mengen	142
27.2 Gewichtete und fraktionale Graphenparameter	145
27.3 Eine weitere Charakterisierung von Perfektheit	146

28. Optimieren über STAB und die Lovász-Ecke	148
29. Baumzerlegungen und Baumweite	150
29.1 Baumzerlegungen und chordale Graphen	151
29.2 Charakterisierung der Baumweite als Spielparameter	152
30. Baumzerlegungen und Baumweite	156
30.1 Anwendungen der Baumweite	156
30.2 Baumweite und Minoren	158
30.3 Das Minorentheorem von Robertson und Seymour	159
30.4 Wohlquasiordnungen	161
31. Planare Graphen	164
31.1 Zeichnungen, Kreuzungen und Jordanscher Kurvensatz	164
31.2 K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar	164
31.3 Duale Graphen	165
31.4 Euler Formel	166
31.5 Folgerungen aus der Eulerformel	167
32. Der Satz von Kuratowski	169
32.1 Das Art-Gallery-Problem	172
32.2 5-Färbbarkeit planarer Graphen (Kempeketten)	173
33. Elektrische Netze und aufspannende Bäume	175
33.1 Elektrische Netze	175
33.2 Squaring the Square	178

Grundlagen I

Um die Beschäftigung mit Graphen zu motivieren, gab es zu Beginn der Vorlesung drei anregende Probleme. Danach wurden einige Grundbegriffe definiert und erste Beispiele für Graphen gegeben. Den Abschluss bildete die Lösung des 1. Problems.

1.1 Anstoß: 3 Probleme

Problem 1

Es sei A_1, \dots, A_n eine Familie paarweise verschiedener Teilmengen von $[n] := \{1, \dots, n\}$.

Frage: Existiert immer ein Element x in $[n]$, so dass $A_1 \cup \{x\}, \dots, A_n \cup \{x\}$ immer noch paarweise verschieden sind?

Problem 2

Ein geometrischer Graph ist ein geradlinig in die Ebene gezeichneter Graph. Der geometrische Graph in Abb.1 ist so gezeichnet, dass die Kanten paarweise nicht disjunkt sind (je zwei haben einen gemeinsamen Knoten oder einen Schnittpunkt).

Frage: Wie viele Kanten kann ein geometrischer Graph mit n Knoten haben, dessen Kanten paarweise nicht disjunkt sind.

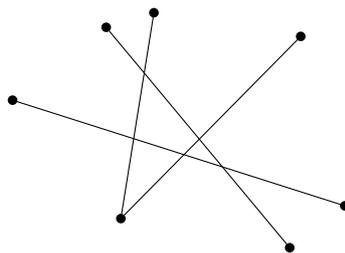


Abbildung 1: Ein geometrischer Graph mit 7 Knoten und 4 Kanten

Problem 3

Gegeben ist ein $n \times m$ Gitter, dessen Kanten starr und dessen Knoten flexibel sind. Wir stellen uns die Kanten als Stäbe fester Länge und die Knoten als punktförmige Gelenkverbindungen vor. Die Aufgabe besteht darin, durch das Einfügen von Diagonalen

in Gitterfeldern die relative Position der Knoten zu fixieren, das heißt die Position aller Knoten in der Ebene ist eindeutig durch die Position von zwei Knoten bestimmt (vergl. Abb. 3).

Frage: Wie viele Diagonalen benötigt man mindestens? Nach dem Einfügen von wie vielen Diagonalen ist das System auf jeden Fall starr, auch wenn wir keinen Einfluss auf das Gitterfeld, in dem die Diagonale eingefügt wird nehmen können?

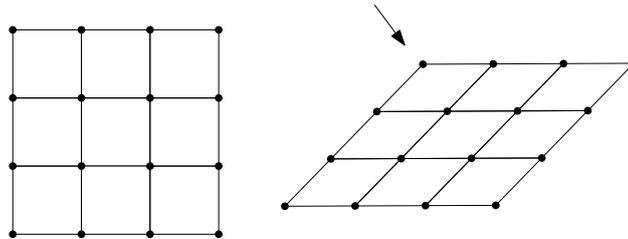


Abbildung 2: Ein flexibles Gitter und eine deformierte Variante

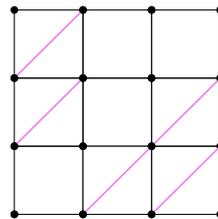


Abbildung 3: Ein durch Diagonalen fixiertes Gitter.

1.2 Einleitung und grundlegende Definitionen

Definition 1.1 (Graph)

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V , deren Elemente Knoten (manchmal auch Ecken) genannt werden und einer Menge $E \subseteq \binom{V}{2}$ deren Elemente Kanten genannt werden. Dabei ist $\binom{V}{2}$ die Menge der zweielementigen Teilmengen von V . Typischerweise benutzt man die Buchstaben n und m so, dass $|V| = n$ und $|E| = m$.

Beispiele:

- Graphendefinition durch eine strukturierte Beschreibung:
 $V = \{0, 1\}^3$, E sind Paare von Knoten, die sich nur in einem Bit unterscheiden. Dies ist eine Beschreibung des Würfelgraphen. Die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen ist offensichtlich. Dieser Graph öffnet Verbindungen zu Geometrie (Hyperwürfel), Kombinatorik (Bool'scher Verband), Informatik und vieles mehr ...

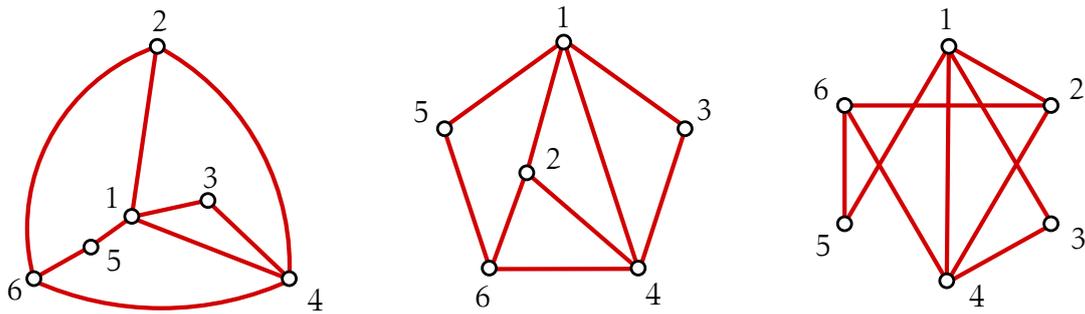


Abbildung 4: Drei Darstellungen des abstrakt beschriebenen Graphen.

- Graphendefinition durch explizite Angabe der Knoten- und Kantenmenge:
 $V = [6], E = \{12, 13, 14, 15, 24, 26, 34, 46, 56\}$ (Die Darstellung von Kanten variiert je nach Nutzung, in diesem Fall steht 12 für die Kante $\{1, 2\}$).
- spezielle Graphen - der Petersengraph
 $V = \binom{[5]}{2}, E = \{(A, B) | A, B \in V \wedge A \cap B = \emptyset\}$

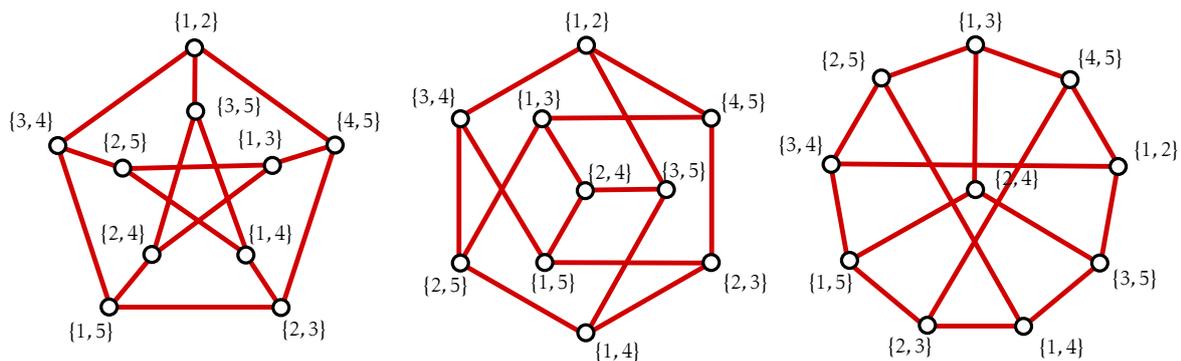


Abbildung 5: Drei Darstellungen des Petersen Graphen.

Die beiden Abbildungen zeigen: Ein Graph kann viele Zeichnungen haben und diese offenbaren unterschiedliche Eigenschaften des abstrakten Graphen.

Definition 1.2 (Homomorphismus)

Ein Homomorphismus ist eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow G'$ mit $\varphi_V : V \rightarrow V'$, sodass für jede Kante $\{x, y\}$ von G gilt: $\{\varphi_V(x), \varphi_V(y)\}$ ist eine Kante von G' . (Homomorphismen erhalten die Kanten).

Definition 1.3 (Isomorphismus)

Isomorphismen sind Homomorphismen die sowohl die Knotenmengen als auch die Kantenmengen von G und G' bijektiv aufeinander abbilden. Graphen, zwischen denen ein Isomorphismus existiert, heißen isomorph (zueinander).

Definition 1.4 (Automorphismus)

Automorphismen sind Isomorphismen von G in sich selbst.

Typischerweise werden Graphen, zwischen denen Isomorphismen existieren, nicht unterschieden. Die folgende Abbildung zeigt die 11 Graphen auf 4 Knoten, wenn wir Graphen als Isomorphieklassen auffassen. Wenn wir die Knoten hingegen als unterscheidbar, als Elemente einer Menge V mit $|V| = n$, auffassen, dann gibt es $2^{\binom{n}{2}}$ Graphen auf n Knoten. Für $n = 4$ sind das 64 Graphen. Das Zählen von Isomorphieklassen ist ein interessantes Problem das man mit Polya-Theorie angehen kann (vergl. VL Kombinatorik).

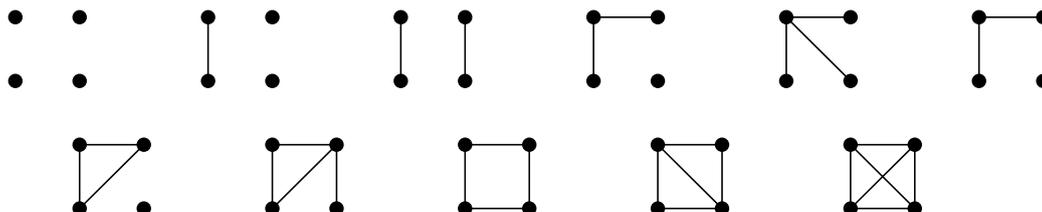


Abbildung 6: Isomorphieklassen auf 4 Knoten.

Die Anzahl der Isomorphieklassen ist bis $n = 25$ bekannt, sie wächst auch sehr schnell. Hier einige Daten:

Knoten	4	5	6	7	8	9	...	15
Klassen	11	34	156	1044	12346	274658	...	31426485969804308768

1.3 Lösung von Problem 1

Es seien A_1, \dots, A_n paarweise verschiedene Teilmengen von $[n]$.

Aussage. Es existiert ein Element x in $[n]$, so dass A_1+x, \dots, A_n+x immer noch paarweise verschieden sind. Dabei ist $A+x$ Kurzschreibweise für $A \cup \{x\}$.

Beweis. Wir modellieren die Aufgabe mithilfe eines Graphen $G = (V, E)$:

- die Knotenmenge sind die Mengen $V = \{A_1, \dots, A_N\}$
- ein $x \in [n]$ heißt schlecht, wenn $i \neq j \in [n]$ existieren mit $A_i = A_j + x$
- für jedes schlechte Element $x \in [n]$ wählen wir genau ein Paar A_i und A_j , für das x schlecht ist, und fügen die Kante $\{A_i, A_j\}$ hinzu.

Behauptung. G ist kreisfrei.

Beweis. Sei $\{A_i, A_j\}$ die Kante zu x , wir dürfen annehmen, dass $x \notin A_i$ und $x \in A_j$. Da es nur eine Kante zu x gibt, ist x in allen Knoten die wir von A_j aus erreichen, ohne über A_i zu gehen enthalten. Daher können nicht zu A_i zurückkehren und es gibt keinen Kreis der die Kante von x enthält. Für jede andere Kante argumentiert man analog. \square

Lemma 1.5 *Kreisfreie Graphen auf n Knoten haben maximal $n - 1$ Kanten.*

Beweis. Wir verwenden Induktion. Für $n = 1$ ist die Aussage trivialerweise wahr. Sei nun G ein kreisfreier Graph mit n Knoten und $e = \{x, y\}$ eine Kante von G . Mit $G_{/e}$ bezeichnen wir den Graphen der durch *Kontraktion* von e aus G entsteht, d.h. wir identifizieren die Knoten x und y von G und löschen die Kante e . Der Graph $G_{/e}$ ist kreisfrei, denn zu einem Kreis in $G_{/e}$ gäbe es einen korrespondierenden Kreis in G . Laut Induktionsvoraussetzung gilt $|E(G_{/e})| \leq |V(G_{/e})| - 1 = (n - 1) - 1 = n - 2$. Mit $|E(G_{/e})| = |E(G)| - 1$ folgt $|E(G)| \leq n - 1$. Das war die Behauptung. \square

Aus diesen Aussagen über den Graphen G folgern wir, dass es mindestens ein $x \in [n]$ geben muss, das nicht schlecht ist. Das bedeutet nun allerdings, dass $A_1 + x, \dots, A_n + x$ immer noch verschieden sind, also haben wir Problem 1 gelöst.

Grundlagen II

Diese Vorlesung begann mit der Vorstellung weiterer grundlegender Begriffe. Anschließend wurden die Probleme 2 und 3 aus der ersten Vorlesung gelöst.

Definition 2.1 Ein Untergraph eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $H = (W, F)$ mit $W \subseteq V$ und $F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$.

Definition 2.2 Ein induzierter Untergraph eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Untergraph $H = (W, F)$ mit $F = E \cap \binom{W}{2}$. Den von W in G induzierten Graphen bezeichnen wir mit $G[W]$.

Man kann auch andere Typen von Graphen definieren, indem man den Kantenbegriff verändert. Möglichkeiten dafür sind *Multikanten* (zwischen zwei Knoten sind mehrere Kanten erlaubt), *Schlaufen* (Kanten deren Endknoten übereinstimmen) oder *gerichtete Kanten* (Kanten sind geordnete Paare und haben damit eine Richtung). Gerichtete Graphen finden Anwendung als Netzwerke oder wenn Graphen als Repräsentanten von Matrizen genutzt werden. Ein ungerichteter Graph ohne Schleifen oder Multikanten wird als einfacher Graph bezeichnet.

Definition 2.3 Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$. Dann ist $E(v) := \{\{v, w\} \mid w \in V \wedge \{v, w\} \in E\}$ die Menge der zu v inzidenten Kanten und $N(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ die Menge der zu v adjazenten Knoten. $N(v)$ wird auch als *Nachbarschaft* von v bezeichnet. Die Zahl $\deg(v) := |E(v)|$ heißt *Grad* des Knotens v .

Beobachtung. In einfachen Graphen gilt $\deg(v) = |E(v)| = |N(v)|$.

Proposition 2.4 (Handschlaglemma)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis. Der Beweis erfolgt mit der Methode des doppelten Abzählens (double counting): Sei I die Menge der Inzidenzen, also die Paare von Knoten und inzidenten Kanten, $I = \{(v, e) : v \in V, e \in E, v \in e\}$. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} \#\{e \in E : v \in e\} = |I| = \sum_{e \in E} \#\{v \in V : v \in e\} = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

□

Folgerung. Jeder endliche Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten, die einen ungeraden Grad haben.

2.1 Lösung von Problem 2

Die Frage war: Wie viele Kanten kann ein geometrischer Graph G mit n Knoten maximal haben wenn die Kanten des Graphen paarweise nicht disjunkt sind? Zwei der Graphen in der folgenden Abbildung haben genauso viele Kanten wie Knoten, Proposition 2.5 zeigt, dass mehr Kanten nicht möglich sind.

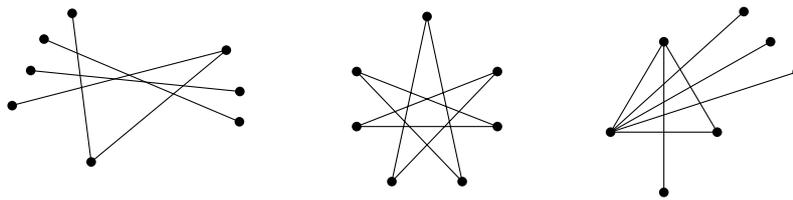


Abbildung 1: Geometrische Graphen ohne disjunkte Kanten.

Proposition 2.5 Für geometrische Graphen ohne disjunkte Kanten gilt $|E| \leq |V|$.

1. **Beweis.** Für diesen Beweis setzt man auf jeden Knoten des Graphen ein Huhn und orientiert alle Winkel zwischen Kanten im Uhrzeigersinn.

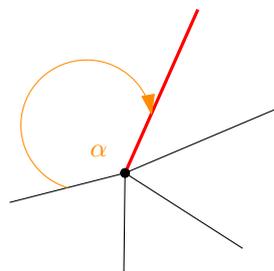


Abbildung 2: größter Winkel an einem Knoten

Anschließend bestimmt man, wie in Abb. 2, den größten Winkel und setzt ein Ei auf die letzte Kante (in Abb. 2 rot markiert). Mit der folgenden Behauptung bekommen wir das Ergebnis:

$$|E| \leq \text{Anzahl Eier} = |V|$$

Behauptung. Auf jeder Kante liegt mindestens ein Ei.

Beweis. Annahme: Es existiert eine Kante e ohne Ei.

Seien α, β die beiden Winkel, die zu einem Ei auf e geführt haben könnten. Die Winkel α und β können jeweils maximal 180° sein, da sie ansonsten garantiert die größten Winkel wären und somit auf e ein Ei liegen würde. Durch die Winkelbeschränkung muss es die zwei Kanten $\{v, w\}$ und $\{v', w'\}$ geben, die in 4 zu sehen sind. Diese werden

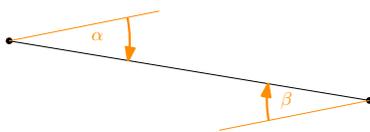


Abbildung 3: mögliche Winkel für e

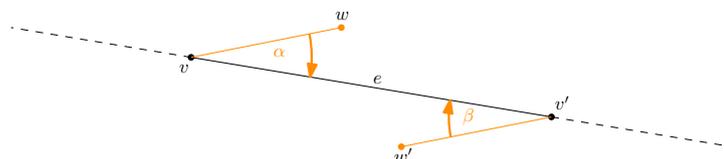


Abbildung 4: Trennung zweier Kanten

aber durch die Gerade, die durch Verlängerung der Kante $\{v, v'\}$ entsteht, getrennt. Damit sind die beiden Kanten disjunkt. Aus dem Widerspruch zur Annahme folgt, dass auf e ein Ei liegen muss. \square

2. **Beweis.** Wenn für alle Knoten v gilt $\deg(v) \leq 2$, dann bekommen wir die behauptete Ungleichung mit dem Handschlaglemma: $|E_G| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) \leq |V_G|$.

Sei G ein geometrischer Graph ohne disjunkte Kanten. Wir versuchen nun den Graphen zu reduzieren. Dafür löschen wir, solange G einen Knoten vom Grad ≤ 1 hat, so einen Knoten und die inzidente Kante. Sei G' der reduzierte Graph, dann ist G' ein geometrischer Graph ohne disjunkte Kanten und für alle Knoten v von G' gilt $\deg(v) \geq 2$. Wenn $|E_{G'}| \leq |V_{G'}|$ gilt, so folgt auch $|E_G| \leq |V_G|$ (beim Reduzieren wurde jeweils ein Knoten mit maximal einer Kante entfernt).

Behauptung. G' hat keinen Knoten vom Grad ≥ 3 .

Beweis. Angenommen es gibt einen Knoten $v \in V'$, dessen Grad ≥ 3 ist. Eine der drei Kanten an v trennt die beiden anderen Kanten, Abb. 5 zeigt eine Skizze. Der andere Knoten w dieser Kante kann zu keiner weiteren Kante inzident sein, da diese entweder zu e' oder e'' disjunkt wäre. Somit ist $\deg(w) = 1$. Das ist ein Widerspruch, denn G' hat als reduzierter Graph keinen Knoten vom Grad 1. \square

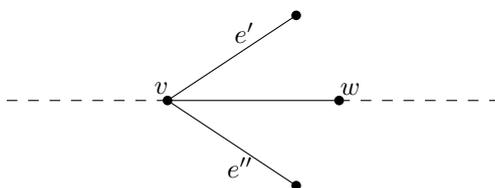


Abbildung 5: Knoten mit Grad 3

Damit ist das zweite Problem gelöst, die Geschichte geht aber noch ein Stück weiter.

Definition 2.6 (Topologischer Graph)

Ein topologischer Graph ist ein in die Ebene eingebetteter Graph, in dem die Kanten als Jordankurven gezeichnet sind.

Ein Graph der eine kreuzungsfreie (topologische) Zeichnung besitzt wird planarer Graph genannt. Aus der Theorie ist bekannt, dass jeder planare Graph auch eine kreuzungsfreie Zeichnung als geometrischer Graph besitzt, d.h. jeder Graph, der topologisch kreuzungsfrei gezeichnet werden kann, kann auch geometrisch kreuzungsfrei gezeichnet werden.

Wenn wir uns für Zeichnungen ohne disjunkte Kanten interessieren, dann sieht es anders aus. Der Kreis C_6 hat eine Realisierung als topologischer Graph ohne disjunkte Kanten (Lemma 2.8) nicht aber als geometrischer Graph ohne disjunkte Kanten.

Definition 2.7 (Thrackle)

Einen topologischen Graphen ohne disjunkte Kanten, in dem je zwei Kanten genau einen Punkt gemeinsam haben, nennt man Thrackle.

Bemerkung. Die Thrackle Vermutung von Conway aus den 1960er Jahren lautet: $|E_G| \leq |V_G|$. Die Vermutung ist weit offen, die beste bekannte Schranke an die Kantenzahl eines Thrackles ist $|E_G| \leq 1.428|V_G|$

Lemma 2.8 Der Kreis C_n ist für $n \geq 5$ ein Thrackle.

Beweis. Man kann für C_5, C_6 leicht eine Darstellung finden, zu sehen in Abb. 6.

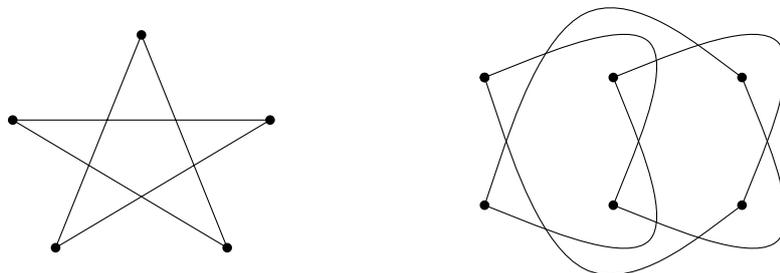


Abbildung 6: Thrackledarstellung des C_5 und C_6

Induktionsannahme ist daher, man hat den C_{n-2} als Thrackle dargestellt. Dann kann der C_n durch folgende Konstruktion erzeugt werden:



Abbildung 7: Konstruktion eines C_n aus einem C_{n-2}

□

2.2 Lösung Problem 3

Gegeben ist ein $(n + 1) \times (m + 1)$ Gitter, dessen Kanten starr sind, aber Verbindungen an den Knoten sind flexibel, siehe Abb. 2. Die Aufgabe ist, durch das Einfügen von Diagonalen die Position der Knoten zu fixieren, so dass die Differenzvektoren für je zwei Knoten unveränderlich sind. Abb. 3 zeigt ein starres Beispiel.

Beobachtung. Die Kanten können in Parallelklassen eingeteilt werden.

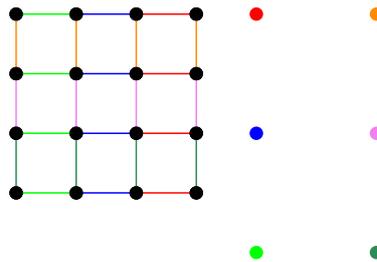


Abbildung 8: Farblich markierte Parallelklassen von Kanten. Wir modellieren jede Parallelklasse durch einen Knoten in einem Hilfsgraphen.

Beobachtung. Eine Diagonale „verschleißt“ zwei Parallelklassen.

Das benutzen wir nun um das Problem mittels eines Hilfsgraphen G_D zu modellieren. Parallelklassen entsprechen den Knoten von G_D , wie in Abb. 8 gezeigt, eine Kante entspricht einer Diagonalen. Das Gitter ist genau dann fixiert, wenn G_D zusammenhängend ist.

- Wie viele sind mindestens nötig?

Es gibt $n + m$ Parallelklassen um sie zu verbinden benötigt man zumindest $n + m - 1$ Verbindungen.

- Wie viele reichen aus?

Wenn man je eine vertikale und eine horizontale Klasse (bzw. entsprechenden Knoten) auswählt, diesen mit allen horizontalen/vertikalen Knoten verbindet, so erhält man $n + m - 1$ Kanten, da die Kante zwischen den beiden doppelt gezählt wird, zu sehen in Abb. 9.

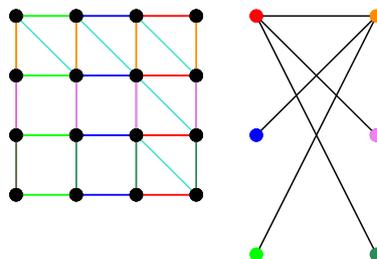


Abbildung 9: starre Lösung mit $n + m - 1$ Kanten

- Mit wie vielen Kanten ist die Starrheit garantiert?

$n(m-1) + 1$, da man mit $n(m-1)$ alle Horizontalen mit allen bis auf einen Vertikalen verbinden kann, siehe Abb. 10

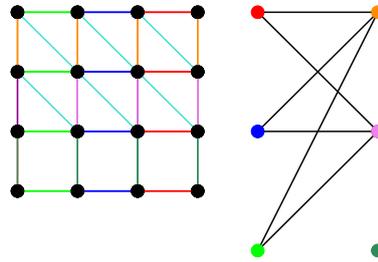


Abbildung 10: nicht starre Lösung mit $n(m-1)$ Kanten

Lemma 2.9 *Bipartite Graphen auf $[n] \cup [m]$ mit $(m-1)n + 1$ Kanten sind zusammenhängend.*

2.3 Starrheit allgemein

Untersuchungen der Starrheit von Graphen sind aus der Statik motiviert. Für einen geometrischen Graphen können wir, so wie wir es beim Gitter getan haben, die Kantenlängen fixieren (uns die Kanten als feste Stäbe denken) und dann nach der Flexibilität fragen. Wie beim Gitter sagen wir der Graph ist **starr** wenn die Position von zwei Knoten die Einbettung vollständig bestimmt^I, andernfalls ist er **flexibel**.

Es kann passieren, dass ein geometrischer Graph starr ist weil die Längen der Kanten speziellen Relationen gehorchen, dies ist z.B. der Fall wenn wir den 4-Kreis mit Kantenlängen 3,1,1,1 darstellen. Ein Graph ist **generisch starr** wenn seine Starrheit nicht auf solchen speziellen Relationen beruht.

Ein Graph ist **minimal starr** wenn er starr ist, aber flexibel wird wenn eine beliebige Kante gelöscht wird.

Mit diesen Begriffen können wir eine auf Laman zurückgehende Charakterisierung starrer Graphen formulieren:

Satz 2.10 *Ein Graph $G = (V, E)$ ist in der Ebene minimal generisch starr, genau dann wenn:*

$$|E| = 2|V| - 3 \quad \text{und} \quad \forall W \subseteq V : |E[W]| \leq 2|W| - 3$$

^IGenaugenommen kann auch ein starrer Graph mehrere Zeichnungen mit den gegebenen Längen haben. Wenn zum Beispiel u, v eine trennende Menge ist, dann kann eine Seite an der Geraden durch u, v umgeklappt werden. Allerdings hat ein starrer Graph nur endlich viele Zeichnungen mit den gegebenen Längen, ein flexibler Graph hat immer unendlich viele.

Gradfolgen, Wege und Kreise

In dieser Vorlesung wurden Gradsequenzen besprochen. Wir haben zwei verschiedene Charakterisierungen von Gradsequenzen, zu denen tatsächlich ein Graph existiert, kennengelernt, eine davon die von **Havel-Hakimi**. Diese Untersuchungen motivierten die Betrachtung des Übergangsgraphen der 2-Switches, den wir Flip-Graph genannt haben.

Zum Schluß gab es noch einige Definitionen zu Wegen und Kreisen.

3.1 Gradfolgen

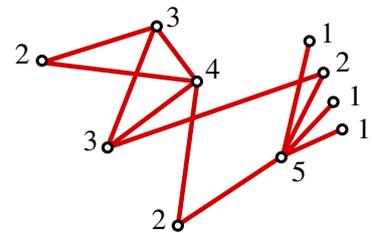
Definition 3.1 Die Gradsequenz (auch: Gradfolge) eines Graphen ist die sortierte Multimenge der Knotengrade.

Zur Definition betrachten wir ein Beispiel:

Beispiel. Die Gradsequenz des Graphen in der Abbildung ist $(5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Frage: Wie erkennt man, ob (d_1, d_2, \dots, d_n) mit $d_i \geq d_{i+1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ eine Gradsequenz eines einfachen Graphen ist?

Notwendig dafür ist (wegen des Handschlaglemmas 2.4) eine gerade Gradsumme. Dies schließt beispielsweise $(3, 3, 2, 1)$ als mögliche Gradsequenz aus. Aber auch $(2, 2, 0, 0)$ ist keine Gradsequenz (da einfache Graphen weder Mehrfachkanten noch Schleifen haben).



3.2 Charakterisierung von Havel und Hakimi

Satz 3.2 Eine Folge $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ mit $d_i \geq d_{i+1}$ ist eine Gradfolge, genau dann wenn die Folge $D' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ eine Gradfolge ist.

Bemerkung. Die Folge D' muss eventuell umgestellt werden, damit es eine sortierte Folge ist.

Bemerkung. Plausibel machen der Aussage mittels Ferrers-Diagrammen:

von Schritt zu Schritt wird jeweils ein Knoten v mit maximalem Grad und alle seine Kanten entfernt. Damit wird die Knotenzahl um eins verringert und der Grad

jedes Nachbarknotens verringert sich ebenfalls um 1. Nachdem die Zeile von v und je eine Zeile bei den Nachbarn entfernt sind müssen die Zeilen des Ferrers-Diagramms gegebenenfalls umsortiert werden um die Monotonie wieder herzustellen.

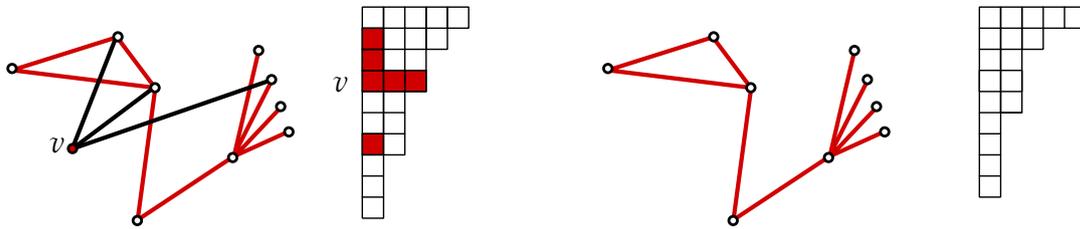


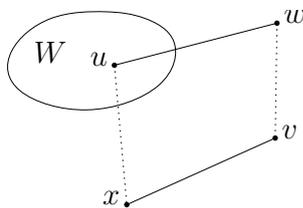
Abbildung 1: Ein Graph G mit seinem Ferrers-Diagramm F_G sowie $G \setminus v$ und $F_{G \setminus v}$.

Beweis. (\Leftarrow) Es sei G' ein Graph zur Gradsequenz D' und W eine Menge von Knoten mit den Graden $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1$. Es sei x ein neuer Knoten. Verbinde x mit G' mit den Kanten $\{x, w\}$ für $w \in W$. Der entstehende Graph hat Gradsequenz D .

(\Rightarrow) Es sei G der Graph zur Gradsequenz D und $x \in G$ ein Knoten mit $\deg(x) = d_1$. Wir betrachten die Multimenge M der Grade in $N(x)$ (Nachbarschaft von x).

Fall 1: Wenn $M = (d_2, \dots, d_{d_1+1})$. Dann liefert das Löschen von x den Graphen G' mit Gradsequenz D' .

Fall 2: Andernfalls: Fixiere eine Menge W von Knoten so, dass die Grade in W (d_2, \dots, d_{d_1+1}) sind (damit ist $|W| = d_1$).



Da $|N(x)| = |W|$ gibt es Knoten $u \in W \setminus N(x)$ (sonst Fall 1) und $v \in N(x) \setminus W$, wegen $|N(x)| = |W|$. Damit ist $x \in N(v) \setminus N(u)$. Durch die Wahl von W gilt $\deg(u) \geq \deg(v)$, deshalb gibt es nun einen Knoten $w \in N(u) \setminus N(v)$.

Wir ändern nun den Graphen mit einer *FLIP*-Operation (Vertausche Kanten und Nicht-Kanten in einem alternierenden 4-Kreis): Löschen der Kanten (x, v) und (u, w) und Hinzufügen der Kanten (x, u) und (v, w) .

Dies liefert einen Graphen mit selber Gradsequenz und der Abstand von W und $N(x)$ ist kleiner geworden.

Wiederhole dies, bis $W = N(x)$, dann Fall 1. □

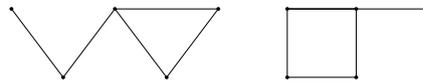
3.2.1 Der Flipgraph der 2-Switches

Der Flipgraph zur Gradfolge $D = (d_1, \dots, d_n)$ hat als Knotenmenge alle Graphen auf der Knotenmenge $[n]$ mit $\deg(i) = d_i$. Der Flipgraph hat eine Kante zwischen zwei Graphen, wenn sie durch eine FLIP-Operation (Vertausche Kanten und Nicht-Kanten in einem alternierenden 4-Kreis) ineinander überföhrbar sind.

Proposition 3.3 *Der Flipgraph zu D ist zusammenhängend.*

Beweis. Es sei G^* der in der Hinrichtung des Beweises konstruierte Graph. Die Rückrichtung zeigt, dass jeder Graph mit Gradsequenz D sich mit Flips in G^* überführen lässt. □

Beispiel. $D = (3, 2, 2, 2, 1)$



Die beiden kleinen Graphen, angeordnet auf dem K_5 , sind die einzig möglichen Graphen zur gegebenen Gradsequenz. Daraus ergibt sich folgender Flipgraph:

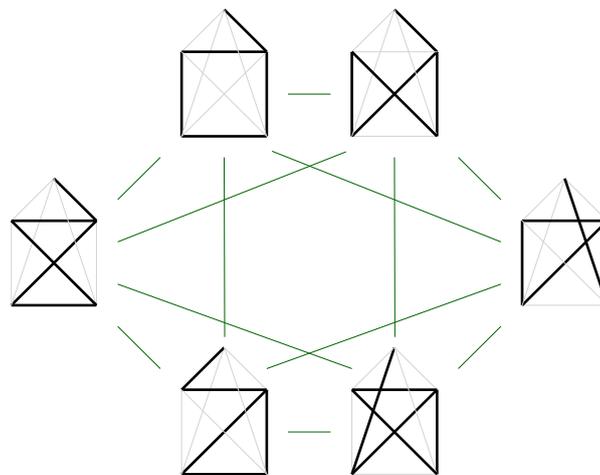


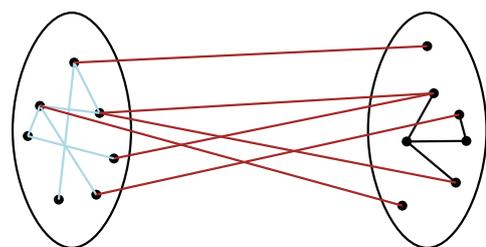
Abbildung 2: Flipgraph zur Gradsequenz $D = (3, 2, 2, 2, 1)$.

3.2.2 Erdős–Gallai Charakterisierung von Gradfolgen

Satz 3.4 (d_1, \dots, d_n) mit $d_i \geq d_{i+1}$ ist eine Gradfolge, genau dann wenn $\sum_i d_i$ gerade ist und für alle k gilt:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{j>k} \min(k, d_j)$$

Beweis. Wir zeigen hier nur die Notwendigkeit dieser Bedingung anhand des Bildes. Im linken Teil der Partition befinden sich die Knoten mit den Graden d_1, \dots, d_k . Zwischen diesen k Knoten kann es höchstens $\frac{1}{2}k \cdot (k-1)$ Kanten geben (im Bild hellblau) in der Gleichung werden diese (je an beiden Endknoten) durch den ersten Term auf der rechten Seite gezählt.



Der zweite Term zählt nun die Kanten zwischen den beiden Teilen (im Bild braun). Die Zählung läuft dabei über alle Knoten des rechten Teils, also über die Knoten mit Index $j > k$. Die Anzahl der Kanten von so einem Knoten j in den linken Teil ist höchstens $\min(k, d_j)$. \square

3.3 Wege und Kreise

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Definition 3.5 Ein Kantenzug (engl. walk) in G ist eine Knotenfolge $W = (v_1 \dots v_k)$, wobei $\{v_i v_{i+1}\} \in E$.

Definition 3.6 Ein Weg (auch: kantendisjunkter Kantenzug, engl. trail) in G ist ein Kantenzug, der keine Kante doppelt benutzt.

Definition 3.7 Ein Pfad (auch: knotendisjunkter Kantenzug, engl. path) in G ist ein Kantenzug, der keinen Knoten doppelt benutzt.

Definition 3.8 Die Länge eines Weges bezeichnet die Anzahl der Kanten des Weges. (Achtung, manchmal wird mit Länge auch die Anzahl der Knoten gemeint!)

Definition 3.9 Für $a, b \in V$ spricht man von einem a - b -Pfad/Weg/Kantenzug $(v_1 \dots v_k)$, wenn $a = v_1$ und $v_k = b$.

Definition 3.10 Für $A, B \subseteq V$ spricht man von einem A - B -Pfad/Weg/Kantenzug $(v_1 \dots v_k)$, wenn $v_1 \in A$ und $v_k \in B$.

Definition 3.11 Ein Zykel (auch: geschlossener Kantenzug, engl. cycle) in G ist ein Kantenzug, für den $v_k = v_1$ gilt.

Definition 3.12 Ein Kreis (geschlossener Pfad) in G ist ein Pfad, für den $v_k = v_1$ gilt.

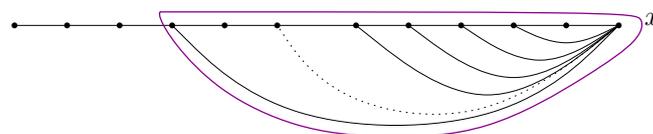
Definition 3.13 $\Delta(G) = \max(\deg(v) : v \in V)$.

Definition 3.14 $\delta(G) = \min(\deg(v) : v \in V)$.

Proposition 3.15 Jeder Graph G enthält einen Pfad der Länge $\geq \delta(G)$.

Jeder Graph G enthält einen Kreis der Länge $\geq \delta(G) + 1$, wenn $\delta(G) \geq 2$.

Beweis. Teil 1 (Pfad): Betrachte zunächst einen längsten Pfad in G . Sei x ein Endknoten dieses Pfades.



Da der Pfad nicht verlängert werden kann, ist die Nachbarschaft $N(x)$ Teil des Pfades. Also enthält der Pfad mindestens $\deg(x) + 1$ Knoten. Also gilt

$$\text{Länge des Pfades} \geq \deg(x) \geq \delta(G).$$

Teil 2 (Kreis): Alle Nachbarn von x liegen auf dem Pfad. Die Kante zu dem Nachbarn, der entlang des Pfades am weitesten von x entfernt ist, liefert also einen Kreis mit mindestens $\deg(x) + 1$ Knoten. Also gilt:

$$\text{Länge des Kreises} \geq \deg(x) + 1 \geq \delta(G) + 1. \quad \square$$

Definition 3.16 Der Abstand $\text{dist}(u, v)$ bezeichnet die minimale Länge eines u - v -Pfades.

Bemerkung. Die Abbildung $\text{dist} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik:

- $\text{dist}(u, v) = 0 \Rightarrow u = v$
- $\text{dist}(u, v) = \text{dist}(v, u)$
- $\text{dist}(u, w) \leq \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w)$

Definition 3.17 Der Durchmesser $\text{diam}(G)$ eines (zusammenhängenden) Graphen G bezeichnet den maximalen Abstand zweier Punkte in G ,

$$\text{diam}(G) = \max_{u, v \in V} \text{dist}(u, v)$$

Definition 3.18 Der Radius $\text{rad}(G)$ bezeichnet den kleinstmöglichen Maximalabstand von einem gegebenen Knoten aus, d.h. $\text{rad}(G) = \min_{u \in V} (\max_{v \in V} \text{dist}(u, v))$.

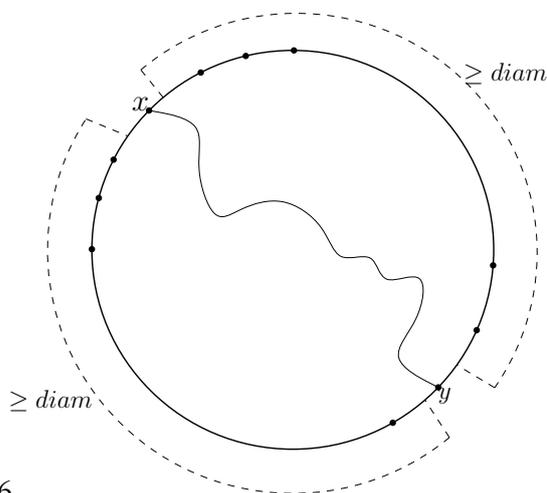
Bemerkung. Es gilt: $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G)$.

Definition 3.19 Die Taillenweite $\text{girth}(G)$ eines Graphen G bezeichnet die minimale Länge eines Kreises in G .

Lemma 3.20 Wenn G Kreise enthält, dann gilt

$$\text{girth}(G) \leq 2\text{diam}(G) + 1$$

Beweis. Sei K ein kürzester Kreis, angenommen, seine Länge ist $> 2\text{diam}(G) + 1$.



Wähle $x \in K$ fest. Es existiert ein Knoten y , der entlang des Kreises K von x aus nicht mit weniger als $\text{diam}(G)$ vielen Schritten erreicht wird. Ausserdem existiert ein Weg von x nach y mit weniger als $\text{diam}(G)$ vielen Schritten.

Deshalb kann K nicht der kleinste Kreis sein. \square

Beispiel. dafür, dass die Schranke scharf ist: Im C_5 gilt $\text{girth} = 5$ und $\text{diam} = 2$.

Zusammenhang und Satz von Menger

In der 4. Vorlesung wurden zunächst grundlegende Definitionen besprochen, mit denen wir dann den **Satz von Menger** formulieren und beweisen konnten. Anschließend wurden Varianten des Mengerschen Satzes besprochen. Dafür mussten wir den Knotenzusammenhang und den Kantenzusammenhang definieren. Im letzten Teil haben wir diese beiden Begriffen in Relation zueinander gestellt.

4.1 Zusammenhang

Definition 4.1 Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend**, wenn für alle $u, v \in V$ ein Pfad (knotendisjunkter Kantenzug) von u nach v existiert.

Definition 4.2 Ein **Separator** (auch: trennende Knotenmenge) von G ist eine Teilmenge $S \subseteq V$, so dass der induzierte Teilgraph $G[V \setminus S]$ nicht zusammenhängend oder einelementig ist.

Definition 4.3 Der **Knotenzusammenhang** $\kappa(G)$ ist die minimale Kardinalität eines Separators.

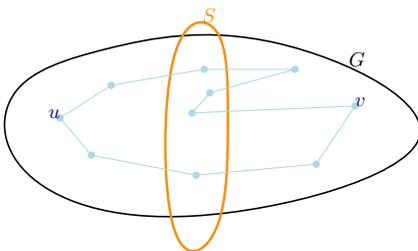


Abb. 1: Der Separator S trennt die Knoten u und v in G .

Beispiel. Für den vollständigen Graphen gilt $\kappa(K_n) = n - 1$ (Diese Graphen sind der Grund dafür, dass für Separatoren $|V \setminus S| = 1$ erlaubt wird. Andernfalls gäbe es in K_n keinen Separator).

Beispiel. Für den vollständigen bipartiten Graphen gilt $\kappa(K_{n,m}) = \min\{m, n\}$

Beobachtung. Wenn in G zwischen je 2 Knoten k intern disjunkte Pfade (d.h. Pfade, die paarweise außer Anfangs- und Endknoten keine Knoten gemeinsamen haben) existieren, dann gilt $\kappa(G) \geq k$. Dies liegt daran, dass ein u - v trennender Separator aus jedem u - v -Pfad mindestens einen Knoten enthalten muss. Wenn k intern disjunkte Pfade existieren sind die k Durchschnitte mit dem Separator verschieden. (Die Umkehrung dieser Aussage ist der interessante Teil im Satz von Menger.)

Beobachtung. $\kappa(G) \leq \delta(G)$, denn für jedes v ist $N(v)$ ein Separator.

4.2 Intern disjunkte p - q -Wege und Satz von Menger

Definition 4.4 $\mu(p, q)$ bezeichnet die maximale Anzahl von intern disjunkten p - q -Pfaden.

Definition 4.5 $\kappa(p, q)$ bezeichnet die minimale Kardinalität einer Knotenmenge, die p und q trennt. Falls keine solche Knotenmenge existiert (z.B. weil $\{p, q\} \in E$) dann setzen wir $\kappa(p, q) = \infty$.

Beobachtung. $\kappa(p, q) \geq \mu(p, q)$, da von jedem der intern disjunkten p - q -Pfade ein Knoten gelöscht werden muss um p und q zu trennen.

Satz 4.6 (Menger, p - q -Variante)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, $p, q \in V$ zwei Knoten mit $\{p, q\} \notin E$, dann gilt $\kappa(p, q) = \mu(p, q)$.

Beweis. Es sei $k = \kappa(p, q)$. Wir werden die Aussage mit Induktion nach k und der Kantenzahl des Graphen beweisen. Es folgt eine Fallunterscheidung, der erste Fall liefert die Basis für die Induktion:

Fall 1: Jede Kante ist mit p oder q verbunden.

In diesem Fall besteht jeder p - q Pfad nur aus zwei Kanten. Daher ist $N(p) \cap N(q)$ eine p - q trennende Menge. Wegen $k = \kappa(p, q)$ gilt nun: $|N(p) \cap N(q)| \geq k$. Dies impliziert aber sofort die Existenz von k intern disjunkten p - q Pfaden.

Fall 2: Es existiert eine Kante $e = \{u, v\} \in E$ mit $\{u, v\} \cap \{p, q\} = \emptyset$.

Wir betrachte den Graphen $G \setminus e$ in einer weiteren Fallunterscheidung (Das Löschen einer Kante kann κ nicht um mehr als 1 reduzieren, daher decken 2.1 und 2.2 sämtliche Möglichkeiten ab.):

Fall 2.1: $\kappa_{G \setminus e}(p, q) = k$.

Die Kantenzahl von $G \setminus e$ ist kleiner als die von G . Induktion liefert die Existenz von k intern disjunkten p - q Pfaden.

Fall 2.2: $\kappa_{G \setminus e}(p, q) = k - 1$.

Es sei S ein p und q trennender Separator in $G \setminus e$ mit der Kardinalität $k - 1$. Da S in G nicht p - q trennend ist liegen p und q auf verschiedenen Seiten des Separators, siehe Abb. 2.

Wir konstruieren nun 2 kleinere Graphen H_q und H_p : Für H_q betrachten wir die Komponente von $G \setminus S$ in der p liegt zusammen mit S . Diesen Graphen ergänzen wir um einen neuen Knoten q^* der durch neue Kanten

mit allen Knoten aus S und mit u verbunden wird. Der Grad von q^* in H_q ist k . Für H_p verfahren wir analog mit einem neuen Knoten p^* .

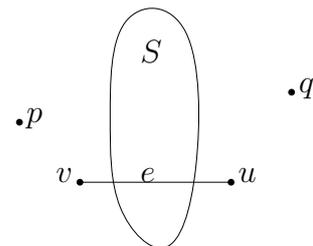
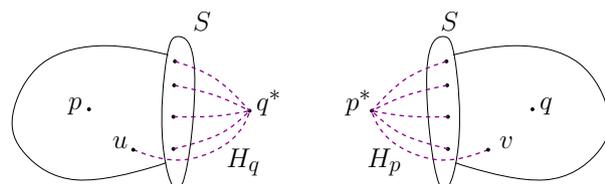


Abb. 2: S nicht trennend.



Für diese Graphen gilt $\kappa_{H_q}(p, q^*) = k$ und $\kappa_{H_p}(p^*, q) = k$. Mit Induktion bekommen wir:

- k intern disjunkte Pfade von p nach q^* in H_q (wobei die letzten Kanten die k neuen sind),
- k intern disjunkte Pfade von p^* nach q in H_p (wobei die ersten Kanten die k neuen sind).

Verkleben an Knoten in S bzw. über die Kante $\{u, v\}$ liefert k intern disjunkte p - q Pfade in G . □

Satz 4.7 (Menger, allgemeine Variante)

$G = (V, E)$ ist genau dann k -zusammenhängend (d.h. $\kappa(G) \geq k$), wenn für jedes Knotenpaar $u, v \in V$ mindestens k intern disjunkte Wege von u nach v existieren.

Beweis. (\Leftarrow) Für alle Knotenpaare $u, v \in V$ gibt es k disjunkte Wege von u nach v . Sei S ein Separator, der u und v trennt. Wenn S ein Separator ist kann keine Kante zwischen u und v verlaufen. Daher wird jeder der k (disjunkten) Pfade, die u und v verbinden, von S getrennt und wir folgern $|S| \geq k$.

Wenn S ein Separator ist, der keine zwei Knoten trennt, dann gilt laut Definition $|S| = |V| - 1 \geq k$.

(\Rightarrow) Es sei $\kappa(G) = k$ und $u, v \in V$. Es ist zu zeigen, dass k intern disjunkte Wege von u nach v existieren.

Wenn $\{u, v\} \notin E$, ist $\kappa_G(u, v) \geq k$ und die Aussage aus dem p - q Menger (Satz 4.6). Die Aussage folgt ebenso wenn $e = \{u, v\} \in E$ und $\kappa_{G \setminus e}(u, v) \geq k$.

Es bleibt also der Fall $e = \{u, v\} \in E$ und $\kappa_{G \setminus e}(u, v) < k$. Für den Zusammenhang von $G \setminus e$ muss nun gelten: $\kappa(G \setminus e) = k - 1$. Insbesondere ist $\kappa_{G \setminus e}(u, v) = k - 1$ und aus Satz 4.6 folgt die Existenz von $k - 1$ intern disjunkten u - v Pfaden, zusammen mit dem durch die Kante gegebenen Pfad haben wir also k intern disjunkte u - v Pfade in G . □

4.2.1 8 Varianten des Satzes von Menger

Wir können den Satz von Menger in insgesamt 8 Varianten formulieren:

- p, q oder allgemein
- Knoten oder Kanten
- gerichtet oder ungerichtet

Kantenzusammenhang

Definition 4.8 (Schnitt und Kantenzusammenhang)

Ein Schnitt in einem Graphen G ist eine trennende Kantenmenge.

Der Kantenzusammenhang $\kappa'(G)$ ist die minimale Kardinalität eines Schnittes in G .

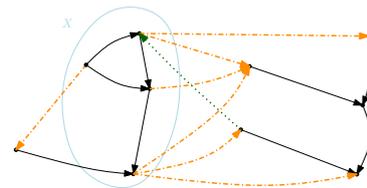
Satz 4.9 (Menger, allgemeine Kantenversion)

$G = (V, E)$ ist genau dann k -kanten-zusammenhängend (d.h. $\kappa'(G) \geq k$), wenn für jedes Knotenpaar $u, v \in V$ mindestens k Kanten-disjunkte Wege von u nach v existieren.

Definition 4.10 (Knoteninduzierte Schnitte)

Ein *knoteninduzierter Schnitt* ist ein Schnitt, der durch eine Knotenmenge $X \subseteq V$ erzeugt wird: $[X|\bar{X}] = \{(u, v) \in E | u \in X, v \in \bar{X} = V \setminus X\}$.

In der Definition haben wir die Kante als (u, v) bezeichnet weil Schnitte auch für gerichtete Graphen wichtig sind. Das Bild zeigt einen knoteninduzierten Schnitt in einem gerichteten Graphen. Die Knotenmenge X ist hellblau eingekreist, die Kanten im Schnitt orange dargestellt. Die schwarzen und die grüne (gepunktete) Kante sind nicht im Schnitt.



Die gerichtete p, q Kantenversion des Menger Satzes entspricht dem Spezialfall des Satzes von Ford Fulkerson in dem alle Kapazitäten den Wert 1 haben.

Die folgenden Dualitätssätze sind mit dem Satz von Menger verwandt.

- Max Flow - Min Cut [Ford-Fulkerson]
- Matching - VertexCover, in bipartiten Graphen [König-Egervary]
- Kettenzerlegung - Antikette [Dilworth]

4.2.2 $\kappa(G)$ vs. $\kappa'(G)$

Proposition 4.11 Für jeden Graphen G gilt: $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Beweis. Es sei $F \subseteq E$ ein minimaler Schnitt und H eine Komponente von $G \setminus F = (V, E \setminus F)$.

Fall 1: Es gibt einen Knoten x in H , der keine Kante aus F trifft. Betrachte den Separator $S = V_H \cap \{\text{Endknoten von } F\}$. Es gilt $\kappa(G) \leq |S| \leq |F| = \kappa'(G)$.

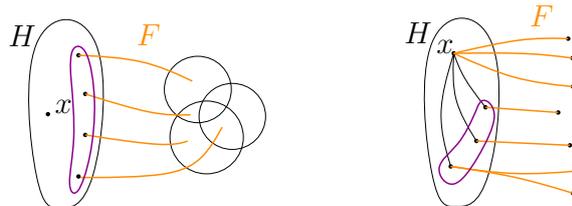


Abb. 3: links das Bild für Fall 1, rechts Fall 2

Fall 2: Jeder Knoten in H ist Endknoten einer F -Kante. Wähle $x \in H$ und betrachte $N(x)$ (das ist ein Separator). Da es eine injektive Abbildung $N(x) \rightarrow F$ gibt (siehe Abb. 3) gilt $\kappa(G) \leq |N(x)| \leq |F| = \kappa'(G)$.

Die zweite Ungleichung ($\kappa' \leq \delta$) ist klar, da die Menge der zu einem Knoten x inzidenten Kanten immer einen Schnitt bilden, das ist $[\{x\}|\bar{x}]$. □

r-partite Graphen, Wälder und Bäume

In der 5. Vorlesung wurde zunächst der Begriff des **r-partiten Graphen** eingeführt, im Anschluss daran die Begriffe **Wald**, **Baum**, **aufspannender Baum**. Zu Bäumen und Wäldern wurden einige charakterisierende Eigenschaften bewiesen. Außerdem gab es einen kurzen Exkurs zu Matroiden.

5.1 r-partite Graphen

Definition 5.1 (r-partit)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *r-partit*, wenn eine Partition V_1, \dots, V_r von V existiert, so dass jede Kante zwischen verschiedenen Teilen der Partition verläuft, formal:

$$\forall e \in E \quad \exists i, j \in \{1, \dots, r\} \text{ mit } e \cap V_i \neq \emptyset, e \cap V_j \neq \emptyset \text{ für } i \neq j$$

2-Partite Graphen heißen auch *bipartit*.

Bemerkung. Eine äquivalente Definition von r-partit ist dies: Es gibt eine Partition V_1, \dots, V_r von V so dass $E \cap \binom{V_i}{2} = \emptyset \quad \forall i \in [r]$.

Eine weitere Sichtweise auf r-partite Graphen liefern Knotenfärbungen. Eine Knotenfärbung ist *legal* wenn die Endpunkte jeder Kanten verschiedene Farben haben. Ein Graph besitzt genau dann eine legale Knotenfärbung die nur r Farben verwendet wenn er r-partit ist. Das Färbungsproblem besteht darin zu einem gegebenen Graphen eine legale Knotenfärbung zu finden die möglichst wenig Farben verwendet. Dieses Problem wird in späteren Vorlesungen noch ausführlich behandelt.

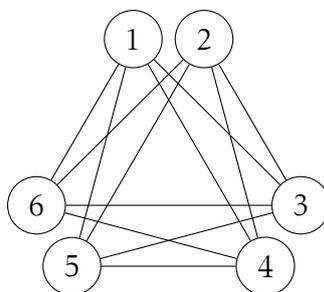


Abbildung 1: Ein 3-partiter Graph auf 6 Knoten. Die einzelnen Klassen sind räumlich getrennt.

Der Graph aus Abb. 1 ist isomorph zum Oktaedergraphen (Abb. 2). Das Oktaeder ist der zum Würfel duale platonische Körper. Der Graph des Würfels ist bipartit, eine 2-Färbung der Ecken des Würfels entspricht einer 2-Färbung der Flächen des Oktaedergraphen.

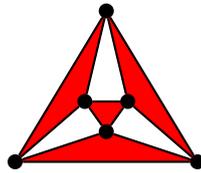


Abbildung 2: Der Oktaedergraph.

Der bipartite Graph $K_{4,4}$ in Abbildung 3 hat eine spezielle Eigenschaft: Er hat unter allen bipartiten Graphen mit 8 Knoten die maximale Anzahl von Kanten. Diese Eigenschaft macht ihn zu einem **Turán-Graphen**. Mit diesen Graphen werden wir uns später noch genauer beschäftigen.

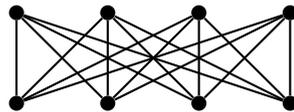


Abbildung 3: Der bipartite Graph $K_{4,4}$.

Proposition 5.2 *Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.*

Beweis. (\Rightarrow) Sei G bipartit und C ein Kreis in G . Die Knoten seien legal mit Farben 1 und 2 gefärbt. Dann muss es in C aber genau so viele Knoten mit Farbe 1 wie mit 2 geben, da ansonsten zweimal hintereinander dieselbe Farbe auftauchen würde. Dies wäre ein Widerspruch dazu, dass G bipartit ist. Damit ist $|C|$ gerade.

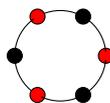


Abbildung 4: Beispiel eines Kreises in einem bipartiten Graphen. Bei ungerader Länge wären zwei Knoten der selben Farbe direkt aufeinanderfolgend

(\Leftarrow) Wir beweisen die Rückrichtung mit einem Algorithmus der eine 2-Färbung von G berechnet. Sei G o.B.d.A. zusammenhängend. Ist G nicht zusammenhängend, wenden wir den Algorithmus auf die einzelnen Komponenten an.

Seien zwei Farben vorgegeben, etwa rot und schwarz. Wähle einen beliebigen Startknoten v_0 und färbe ihn rot. Betrachte nun einen benachbarten Knoten und gib ihm die Farbe schwarz. Führe dieses Verfahren nun weiter fort, d.h. betrachte für einen beliebigen Knoten v einen seiner noch nicht gefärbten Nachbarn und gib ihm

die Farbe, die v nicht hat. Formaler: Wenn $W \subseteq V$ gefärbt ist, betrachte $v \in V \setminus W$, so dass $\exists w \in W \cap N(v)$. Zeichne die Kante v, w aus und färbe v mit so dass gilt $\text{Farbe}(v) \neq \text{Farbe}(w)$. Wenn wir mit diesem Verfahren keine einfarbige Kante erzeugen ist G bipartit.

Jedes v kann von v_0 aus auf einem Weg W_v der nur aus ausgezeichneten Kanten besteht erreicht werden. Wenn v rot ist, dann hat dieser Weg eine gerade Kantenzahl. Wenn v schwarz ist, dann ist $|W_v|$ ungerade. Angenommen, die Färbung hat eine einfarbige Kante (v, w) , etwa mit zwei roten Endknoten. Dann ist $W_v + W_w + (v, w)$ ein geschlossener Kantenzug ungerader Länge. Jeder ungerade Kantenzug enthält einen ungeraden Kreis.

Wenn G keinen ungeraden Kreis enthält erzeugt unser Algorithmus demnach eine legale 2-Färbung, das heißt G ist bipartit. \square

Bemerkung. Die Proposition liefert uns ein einfaches Zertifikat für die Eigenschaft *bipartit* (Angabe der Partition) und ein einfaches Zertifikat für die Eigenschaft *nicht-bipartit* (Angabe eines ungeraden Kreises).

5.2 Wälder und Bäume

5.2.1 Allgemeines und Charakterisierung von Bäumen

Definition 5.3 (Wald, Baum, Blatt)

Ein **Wald** ist ein zyklfreier Graph. Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald. Ein Knoten in einem Wald heißt **Blatt**, wenn er Grad 1 hat.

Beispiel: Ein Beispiel eines Waldes. Die Blätter sind rot markiert, das eingekreiste Gebiet ist für sich allein betrachtet ein Baum

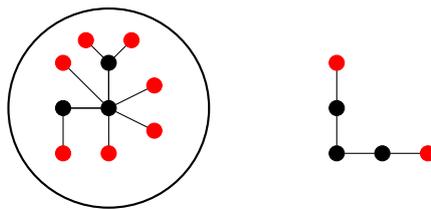


Abbildung 5: Beispiel von Wald, Baum, Blatt

Lemma 5.4 Jeder Baum auf $|V| = n \geq 2$ Knoten besitzt mindestens zwei Blätter.

Beweis. Wähle einen Startknoten v_0 . Wir behaupten, dass wir über jede an v_0 inzidente Kante zu einem Blatt kommen. Nun gilt $\deg(v_0) > 0$ (Zusammenhang und $n \geq 2$). Wenn $\deg(v_0) = 1$ dann ist v_0 selbst ein Blatt und wir finden ein zweites hinter der Kante. Wenn hingegen $\deg(v_0) \geq 2$ finden wir hinter jeder Kante eines.

Um hinter einer Kante (v_0, v_1) ein Blatt zu finden iterieren wir: Wenn v_i kein Blatt ist, dann gibt es eine Kante $(v_i, w) \neq (v_i, v_{i-1})$ und wir setzen $v_{i+1} = w$. Wegen der

Zykelfreiheit sind alle v_i verschieden. Da wir nach Vereinbarung nur endliche Graphen betrachten endet der Prozess in einem Blatt. \square

Beobachtung. Aus Lemma 5.4 folgt weiterhin, dass ein Baum auf n Knoten genau $n - 1$ Kanten besitzt. Dies erkennt man, indem man von einem Baum immer ein Blatt (und damit auch eine Kante) 'abzwackt'. Dieses Verfahren führt man fort, bis keine Kanten mehr übrig sind.

Proposition 5.5 *Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so sind je zwei der folgenden drei Aussagen zur dritten äquivalent und charakterisieren einen Baum:*

1. G ist zusammenhängend
2. G ist kreisfrei
3. $|E| = |V| - 1$

Beweis. $[(1. \wedge 2.) \Rightarrow 3]$ Das haben wir in der vorigen Beobachtung schon aus Lemma 5.4 gefolgert.

$[(\neg 1. \wedge 3.) \Rightarrow \neg 2]$ Sei G nicht zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$. Dann gibt es eine Komponente mit k Knoten und $\geq k$ Kanten. Mit der Beobachtung aus Lemma 5.4 folgt, dass diese Komponente kein Baum sein kann, also muss sie einen Kreis enthalten.

$[(\neg 2. \wedge 3.) \Rightarrow \neg 1]$ Sei G ist nicht kreisfrei mit $|E| = |V| - 1$ Kanten. Wir löschen nun solange Kanten aus dem Graphen, bis dieser kreisfrei ist. Nach Voraussetzung ist dann aber $|E| < |V| - 1$. Erneut mit der Beobachtung folgt dadurch, dass G kein Baum sein kann, also kann G nicht zusammenhängend sein. \square

Aufspannende Bäume

Definition 5.6 (Aufspannender Baum)

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein **aufspannender Baum** von G ist ein Baum $T = (V, F)$ mit $F \subseteq E$.

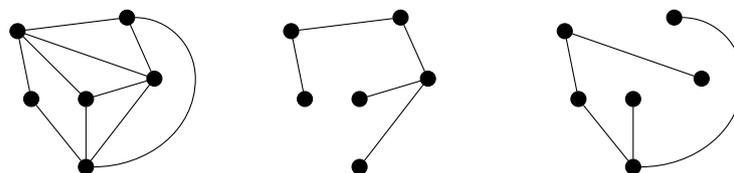


Abbildung 6: Ein Graph und zwei seiner aufspannenden Bäume.

Ein aufspannender Baum T eines Graphen $G = (V, E)$ ist also ein Baum mit der selben Knotenmenge wie G , jedoch (i.A.) weniger Kanten. Wir beweisen nun zunächst folgende intuitive, jedoch wichtige Proposition.

Proposition 5.7 Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.

Beweis. Wir geben zwei Algorithmen an, die einen aufspannenden Baum konstruieren. In beiden Fällen sei $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

```

F ← ∅
for i ← 1 to m do
  if F + ei ist kreisfrei then
    F ← F + ei
return F

```

Die Rückgabe F ist eine maximal kreisfreie Kantenmenge in G , d.h. für alle $e \in E \setminus F$ gilt $F + e$ hat einen Kreis. Es bleibt zu zeigen, dass der durch F induzierte Wald zusammenhängend und damit ein Baum ist.

Angenommen F induziert eine Komponente X mit $X \neq V$. Da G zusammenhängend ist gibt es $u \in X$ und $v \in V \setminus X$ mit $e = \{u, v\} \in E$. Da e nicht genommen wurde gibt es in $F + e$ einen Kreis, also gibt es einen u - v Weg in F , Widerspruch

```

F ← E
for i ← 1 to m do
  if F - ei ist zusammenhängend then
    F ← F - ei
return F

```

Nach Konstruktion ist F zusammenhängend und es gilt: Für alle $e \in F$ ist $F - e$ nicht mehr zusammenhängend. Wir werden nun zeigen, dass F kreisfrei ist. Dazu nehmen wir an, dass F einen Kreis besitzt. Sei $e = (v, w)$ eine Kante des Kreises. Da dann auch $F - e$ zusammenhängend ist haben wir einen Widerspruch zur Konstruktion. \square

Diese beiden Beweise kann man so interpretieren: Die Kantenmengen von aufspannenden Bäumen in G sind die Basen eines **Matroids**.

Exkurs: Matroide

Definition 5.8 (Matroid)

Ein **Unabhängigkeitssystem** $M = (X, \mathcal{I})$ besteht aus einer Grundmenge X und einem Mengensystem $\mathcal{I} \subseteq \text{Pot}(X)$, für das gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. $I \in \mathcal{I}, J \subseteq I \implies J \in \mathcal{I}$

Ein **Matroid** ist ein **Unabhängigkeitssystem** $M = (X, \mathcal{I})$, für das weiterhin ein **Ergänzungaxiom** gilt:

3. $I, J \in \mathcal{I}, |I| > |J| \implies \exists x \in I \setminus J$, sodass $J + x \in \mathcal{I}$.

Beispiel: Zwei klassische Beispiele von Matroiden:

1. Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so ist $M_G(E, \mathcal{F})$ ein Matroid, wobei \mathcal{F} aus den Kantenmengen von Wäldern in G besteht.
2. Ist V ein Vektorraum über einem Körper K und A eine Menge von Vektoren aus V , so bildet $M = (A, \{B \subseteq A \mid B \text{ unabhängig über } K\})$ ein Matroid.

Alle maximal unabhängigen Mengen eines Matroids haben wegen Axiom 3 die gleiche Kardinalität. Diese Mengen sind die **Basen** des Matroids.

Exkurs: Graphensuche

Wir kehren noch einmal zu aufspannenden Bäumen zurück. Man kann diese außer mit den beiden bereits vorgestellten Algorithmen auch mit einer Graphensuche erhalten. Der folgende generische Algorithmus bekommt einen Startknoten s übergeben und verwaltet die Menge der gesehenen Knoten in einer Datenstruktur R und die Teilmenge der gesehenen, aber noch nicht bearbeiteten Knoten in einer Datenstruktur Q .

Ist G zusammenhängend, so wird bei diesem Algorithmus jeder Knoten betrachtet und die zurückgegebene Kantenmenge F ist die eines aufspannenden Baumes.

```

GraphSearch( $s$ )
   $R, Q \leftarrow \{s\}$ 
   $F \leftarrow \emptyset$ 
  while  $Q \neq \emptyset$  do
     $v \leftarrow \text{choose}(Q)$ 
    while  $\exists w \in N(v) \setminus R$  do
       $w \leftarrow \text{choose}(N(v) \setminus R)$ 
       $R \leftarrow R + w$ 
       $Q \leftarrow Q + w$ 
       $F \leftarrow F + (v, w)$ 
     $Q \leftarrow Q - v$ 
  return  $F$ 
    
```

Je nach benutzter Datenstruktur für Q und die Prozedure *choose* ergeben sich spezielle Strukturen und Bäume:

- Ist Q durch einen **Stack** implementiert und *choose* dementsprechend durch *pop*, dann bekommt man eine Tiefensuche (*depth-first-search*).
- Ist Q durch eine **Queue** implementiert und *choose* dementsprechend durch *dequeue*, dann bekommt man eine Breitensuche (*breadth-first-search*).

Bridg-It und die Cayley-Formel

In der 6. Vorlesung wurde mit dem Spiel 'Bridg-It' zunächst eine (spielerische) Anwendung für aufspannende Bäume gezeigt. Im Anschluss wurde die *Cayley-Formel* über die Anzahl aufspannender Bäume des K_n formuliert und auf insgesamt 3 verschiedene Arten bewiesen.

6.1 Bridg-It: Eine Anwendung aufspannender Bäume

Wir betrachten als nächstes das Spiel Bridg-It. Dieses besteht aus einem zweifarbigem Spielfeld, das aus der Überlagerung der Gitterpunkte eines $n \times (n + 1)$ Gitters (Farbe 1) und eines $(n + 1) \times n$ Gitters (Farbe 2) entsteht, bei denen die linken unteren Eckpunkt auf $(1/2, 0)$ und auf $(0, 1/2)$ liegen. Für $n = 4$ sieht das wie folgt aus:

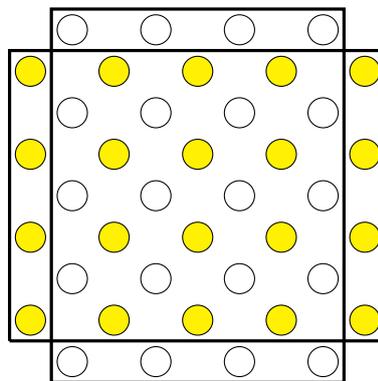


Abbildung 1: Ein Bridg-It Spielfeld

Es gibt zwei Spieler, die in einem Zug jeweils horizontal bzw. vertikal benachbarte Knoten ihres Gitters verbinden dürfen. Wir nennen die Spieler Gelb und Weiß, so wie die Gitterpunkte in der Abbildung gefärbt sind.

Die Spieler sind abwechselnd am Zug. Mit ihrem Zug müssen sie berücksichtigen, dass sich keine zwei Kanten schneiden dürfen, d.h. von jedem weiß-gelben Kantenpaar $\{(a, b - \frac{1}{2}), (a, b + \frac{1}{2})\}$ und $\{(a - \frac{1}{2}, b), (a + \frac{1}{2}, b)\}$ darf nur eine verwendet werden.

Die Aufgabe von Weiß besteht darin, die abgetrennten Bereiche oben und unten zu verbinden. Gelb hingegen hat die Aufgabe die beiden abgetrennten Bereiche rechts und links zu verbinden. Wer seine Aufgabe (zuerst) erfüllt gewinnt.

Wir beginnen mit einigen Beobachtungen.

- Es gibt kein Unentschieden.

Um dies einzusehen denken wir uns das Spiel solange fortgesetzt, bis von jeder Raute (verbotenes Kantenpaar) eine Kante gewählt ist. Angenommen, weiß hat nun nicht gewonnen. Dann enthält der Rand der von weiß erreichbaren Knoten einen „Durchbruch“. Dem Durchbruch entspricht ein gelber Pfad der zeigt, dass Gelb gewonnen hat.

- Mit *strategy stealing* können wir zeigen dass immer der erste Spieler gewinnt. Nimmt man nämlich an, dass eine Gewinnstrategie für den 2. Spieler existiert, so beginnt Spieler 1 mit einem zufälligen Zug und ‘vergisst’ ihn sofort um hinfort die Strategie für Spieler 2 zu benutzen.

Frage: Wie sieht die Gewinnstrategie für Spieler 1 aus?

Um diese Frage zu beantworten betrachten wir das weiße Gitter aller möglichen Kanten, die der weiße Spieler benutzen kann und kontrahieren dabei die oberen bzw. unteren Knoten zu jeweils einem Knoten s bzw. t . In diesem Gitter sucht man nun zwei aufspannende Bäume mit genau einer gemeinsamen Kante. Dies kann (für $n = 4$) zum Beispiel so aussehen:

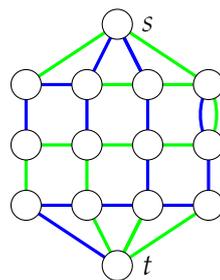


Abbildung 2: Ein Startpaar T_1, T_2 aufspannender Bäume für die Gewinnstrategie.

Der erste Zug von Spieler 1 besteht darin die Kante zu wählen, die zu den beiden Bäumen T_1 und T_2 gehört.

Macht Spieler 2 einen Zug, dann schließt er damit eine Kante e für Spieler 1 aus. Wenn $e \in T_1$ dann hat $T_1 - e$ zwei Zusammenhangskomponenten. Da T_2 aufspannend ist gibt es in T_2 eine Kante f , die die beiden Komponenten von $T_1 - e$ verbindet. Der Zug von Spieler 1 besteht nun aus der Wahl von Kante f und der Redefinition von $T_1 \leftarrow T_1 - e + f$. (Der Fall $e \in T_2$ wird symmetrisch gehandhabt).

Mit dieser Strategie kann Spieler 1 die folgenden Invarianten erhalten:

- T_1 und T_2 sind aufspannende Bäume.
- Alle Kanten die in beiden Bäumen vorkommen gehören Spieler 1.
- Alle Kanten die in nur einem der Bäume vorkommen sind zulässige Züge für Spieler 1.

Aus diesen Invarianten folgt, dass die von Spieler 1 gewählten Kanten am Ende einen aufspannenden Baum bilden und also einen s - t -Pfad enthalten. Spieler 1 gewinnt.

6.2 Die Cayley-Formel: Aufspannender Bäume des K_n

Man stellt fest, dass der K_2 genau einen aufspannenden Baum besitzt, nämlich sich selbst. Der K_3 besitzt 3 aufspannende Bäume. Da der K_3 ein Dreieck ist, muss man für einen aufspannenden Baum genau einen Knoten mit Grad 2 wählen. Die anderen beiden Knoten des Baumes sind dann notwendigerweise dessen Nachbarn.

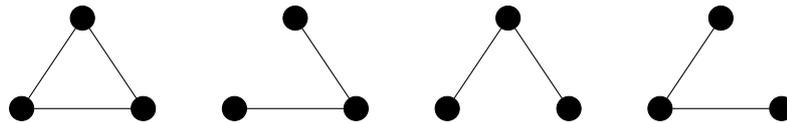


Abbildung 3: Der K_3 und sein aufspannende Bäume

Der K_4 hat 16 aufspannende Bäume: 12 pfadartige und 4 mit einem Knoten vom Grad 3 ('Klauen'). Die pfadartigen erhält man, indem man zunächst 2 Knoten frei wählt, einen als Start- und den anderen als Endknoten des Pfades. Dafür hat man $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten. Es ergeben sich dann stets zwei Wege, diese Wahl zu einem Pfad zu kompletieren. Dieser Faktor hebt sich jedoch dadurch weg, dass die Wahl, welcher der beiden Knoten Anfangs- und welcher Endknoten ist, irrelevant für den entstehenden Baum ist. Daher verbleiben nur die 12.

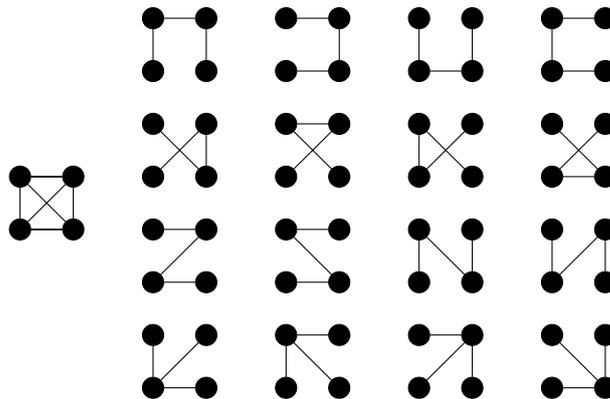


Abbildung 4: Der K_4 und seine aufspannenden Bäume

Für größere n lässt sich diese Überlegung jedoch nicht ohne weiteres fortführen. Für die Anzahl der aufspannenden Bäume des K_n gibt es aber einen sehr einfachen geschlossenen Ausdruck:

Satz 6.1 (Cayley-Formel)

Die Anzahl der aufspannenden Bäume des Graphen K_n ist n^{n-2} .

Beweis. Wir werden 3 Beweise für diese Formel geben:

[Prüfer] Hier wird eine Bijektion zwischen den Bäumen mit nummerierten Knoten (und $|V| = n$) und den geordneten Tupeln (a_1, \dots, a_{n-2}) mit, $a_i \in [n]$ für alle i , verwendet. Da es genau n^{n-2} solcher Tupel gibt, ist der Satz damit bewiesen.

Zunächst zeichnen wir den Knoten n als Wurzel aus orientieren die Kanten so dass alle Wege zur Wurzel hin gerichtet sind. Den Prüfer Code zu einem gegebenen Baum T mit n Knoten konstruiert der folgende Algorithmus:

```

Prüfer Code( $T$ )
for  $k \leftarrow 1$  to  $n - 2$  do
    Finde das Blatt  $i$  mit kleinster Nummer
    Sei  $(i, j)$  die Kante an  $i$ 
    Lösche  $i$ 
     $a_k \leftarrow j$ 
    
```

Durch das Löschen der Knoten ist der Baum nach $n - 2$ Schritten auf eine Kante (k, n) reduziert, hier ist k der Nachbar von n mit der größten Nummer.

Erhält man die Sequenz (a_1, \dots, a_{n-2}) aus einem Baum T , so ist $[n] \setminus \{a_1, \dots, a_{n-2}\}$ die Menge der Blätter $\neq n$ von T . Klarerweise kommen Blätter nicht in der Menge $\{a_1, \dots, a_{n-2}\}$ vor. Außerdem hat jedes Nicht-Blatt eine eingehende Kante die gelöscht wird und kommt daher in der Menge vor.

Hat man daher einen Prüfer Code gegeben, so kennt man die zugehörige Menge B der Blätter. Nun setzt man $i \leftarrow \min(B)$ und vermerkt die Kante an i als $i \rightarrow a_1$. Wenn a_1 nicht mehr in der Folge (a_2, \dots, a_{n-2}) vorkommt, dann ist a_1 ein Blatt in $T - i$. Durch die $n - 2$ fache Iteration dieses Schrittes erzeugt man einen Wald mit $n - 2$ Kanten, d.h. mit zwei Komponenten. Betrachten wir diese beiden Komponenten mit der Orientierung der Kanten dann haben sie je eine Wurzel, die eine ist n und die andere k . Damit ist auch die letzte Kante (k, n) bestimmt und wir haben einen eindeutigen Baum $T = \mathbf{Prüfer Tree}(a_1, \dots, a_{n-2})$.

Um zu zeigen, dass beide Abbildungen bijektiv sind, überzeugt man sich davon, dass $T = \mathbf{Prüfer Tree}(\mathbf{Prüfer Code}(T))$.

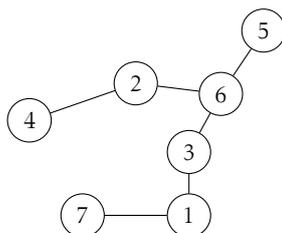


Abbildung 5: Ein Baum mit Prüfer-Code $(2, 6, 6, 3, 1)$

[Clarke] Dieser Beweis benutzt verfeinertes Zählen. Sei dazu

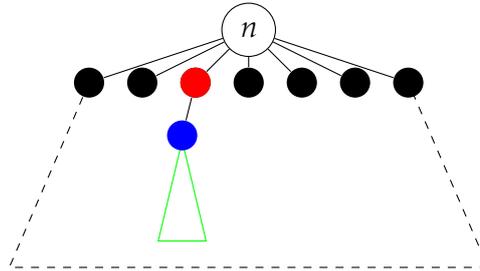
$$C(n, k) := \text{Anzahl der Bäume, in denen Knoten } n \text{ Grad } k \text{ hat.}$$

Dann gilt für die Gesamtanzahl der Bäume $T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} C(n, k)$ und $C(n, n - 1) = 1$.

Wir zeigen nun folgende Formel per Bijektion:

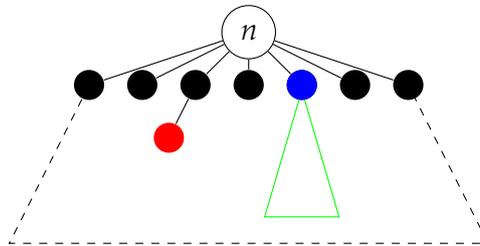
$$(n - 1 - k) \cdot C(n, k) = (n - 1)k \cdot C(n, k + 1)$$

Betrachte dazu zunächst folgendes Bild für die linke Seite der Formel:



Knoten n hat hier Grad k . Man wählt den blauen Knoten als einen der Knoten, der nicht n ist und nicht mit n verbunden ist. Dafür hat man $n - 1 - k$ Möglichkeiten. Der rote Knoten ist als Vorgänger des blauen Knotens eindeutig bestimmt.

Für die rechte Seite der Formel benutzen wir folgendes Bild:



Hier betrachtet man Bäume aus $C(n, k+1)$ und wählt zunächst einen Knoten außer n aus und färbt diesen rot. Dafür hat man $n - 1$ Möglichkeiten. Anschließend wählt man einen der Nachbarn von n aus, der den roten Knoten nicht in seinem Teilbaum hat. Dafür hat man k Möglichkeiten (n hat Grad $k+1$), dies liefert die rechte Seite.

Die gesuchte Bijektion besteht nun aus dem Umhängen des am blauen Knoten b hängenden Teilbaums. Dabei wird b vom Knoten n an den roten Knoten bzw. andersherum umgehängt.

Iteriert man die soeben bewiesene Formel, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} C(n, k) &= (n-1) \frac{k}{n-k-1} C(n, k+1) = \dots = \\ &= (n-1)^{n-k-1} \frac{k(k+1) \cdot \dots \cdot (n-2)}{(n-k-1)(n-k-2) \cdot \dots \cdot 1} C(n, n-1) = \\ &= (n-1)^{n-k-1} \frac{(n-2)_{n-k-1}}{(n-k-1)!} = \binom{n-2}{n-k-1} (n-1)^{n-k-1} = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der binomischen Formel bekommen wir das angestrebte Resultat nun wie folgt:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (n-1)^{(n-2)-k} 1^k = ((n-1) + 1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

[Joyal]. Wir stellen zunächst fest, dass n^n die Anzahl der Abbildungen $[n] \rightarrow [n]$ ist. Eine solche Abbildung kann man sich auch anhand eines gerichteten Graphen veranschaulichen in dem aus jedem Knoten genau eine Kante herausgeht, also $E_g := \{(i, g(i)) \mid i \in [n]\}$. Abb. 6 zeigt ein Beispiel für $n = 10$.

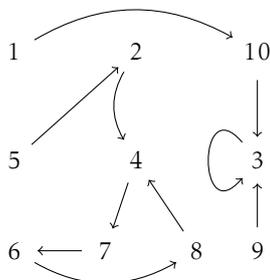


Abbildung 6: Beispiel einer Abbildung

Sei $g : [n] \rightarrow [n]$ eine Abbildung. In jeder Zusammenhangskomponente des gerichteten Graphen $G_g = ([n], E_g)$ gibt es genau einen gerichteten Kreis (evtl. ist dieser Kreis nur eine Schlaufe). Darüberhinaus kann die Komponente noch einige Bäume enthalten die so gerichtet sind, dass alles in den Kreis hineinfließt.

Sei W die Menge der Knoten, die auf Kreisen von G_g vorkommen. Den von W induzierten Graphen $G_g[W]$ können wir als die Zyklendarstellung einer Permutation $\pi_g \in \text{Sym}(W)$ interpretieren. Die Permutation π_g hat auch eine Darstellung als Wort $w_1 w_2 \dots w_z$.

Dieses Wort interpretieren wir nun als Pfad und hängen die Baumanteile von G_g an die richtigen Knoten aus W zurück. So erhalten wir einen Baum T_g auf $[n]$ mit einem Paar ausgezeichnete Knoten w_1, w_z .

Die beschriebene Konstruktion liefert eine Bijektion zwischen Abbildungen $g : [n] \rightarrow [n]$ und Bäumen auf $[n]$ mit einem Paar (w_1, w_z) von Knoten. Da wir zu jedem Baum n^2 solche Paare festlegen können folgt die Cayley-Formel.

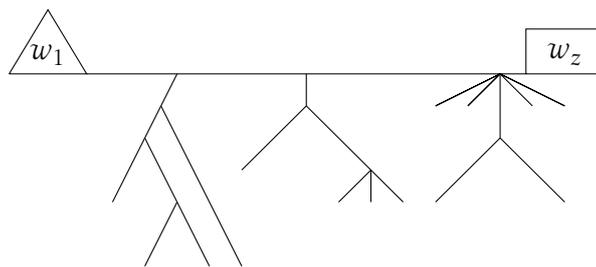


Abbildung 7: Veranschaulichung des Beweises von Joyal

Eulerkreise, \mathbb{F}_2 - und \mathbb{R} -Vektorräume eines Graphen

7.1 Eulerwege und -kreise

Leonard Euler löste 1736 das Problem, dass es in Königsberg keinen Weg gibt, der alle sieben Brücken der Innestadt genau einmal überquert. Allgemeiner stellt sich die Frage: Existiert ein Kantenzug, der alle Kanten eines Graphen genau einmal benutzt? Ein solcher Kantenzug heißt Eulerweg, stimmen Anfangs- und Endpunkt überein, spricht man von einem Eulerkreis. Das Eulerkreisproblem ist in Abbildung 1 dargestellt.

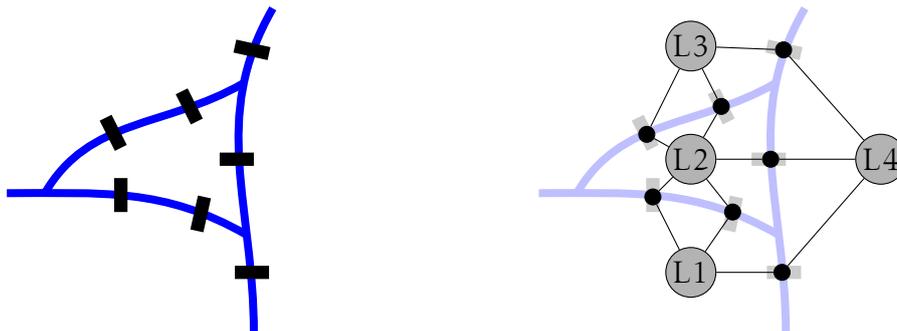


Abbildung 1: Links: das Königsberger Brückenproblem; Rechts: seine Interpretation als Eulerkreisproblem auf einem Graph.

Notwendige Bedingung für Eulerkreise:

Der Graph ist zusammenhängend und jeder Knoten hat geraden Knotengrad.

Beweis. Betrachtet man einen Knoten im Detail sieht man, dass für jede eingehende Kante auch eine ausgehende Kante existieren muss. Andernfalls würde man an diesem Knoten nicht weiterkommen. Man versieht den Eulerkreis dafür mit einer Durchlaufrichtung, dies ist in Abbildung 2 veranschaulicht.

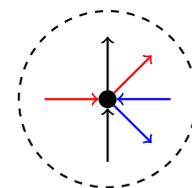


Abb. 2: Detailansicht – Knoten in einem Eulergraphen.

Notwendige Bedingung für Eulerwege:

Wenn G einen Eulerweg mit Anfangs- und Endknoten s und t hat, dann hat $G + (s, t)$ einen Eulerkreis (dabei ist irrelevant ob (s, t) eine Schlaufe ist oder zu einer Mehrfachkante führt). Also muss G wieder zusammenhängend sein und entweder genau zwei Knoten ungeraden Grad oder alle Knoten geraden Grad haben. Es kann

nicht nur einen Knoten mit geradem Grad geben, da sonst die Summe der Knotengrade ungerade wäre.

Lemma 7.1 Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien alle Knotengrade gerade und größer 0, dann besitzt G einen Kreis.

Beweis. Da alle Knotengrade gerade sind, existieren keine Blätter in G . Starte in einem beliebigen Knoten v_0 , gehe von dort zu einem Nachbarknoten und von dort wiederum weiter. Da alle Knoten geraden Grad haben, gibt es immer noch eine Kante, über die wir einen Knoten wieder verlassen können. Da der Graph endlich ist, gelangen wir so irgendwann zu einem Knoten, bei dem wir schon einmal waren. Also haben wir einen Kreis gefunden. \square

Bemerkung. Sei G ein Graph wie in Lemma 7.1 und C ein Kreis in G . Dann gilt, dass in $G \setminus C$ alle Knoten geraden Grad haben.

Satz 7.2 Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender Graph und haben alle Knoten geraden Grad, so existiert in G ein Eulerkreis.

Beweis. Aus dem Lemma 7.1 und der anschließenden Bemerkung folgt, dass wir kantendisjunkte Kreise C_1, \dots, C_k mit $\bigcup_i C_i = E$ finden. Unser Ziel ist nun das Verkleben aller Kreise, so dass ein einziger geschlossener Kantenzug entsteht.

Wir können zwei Kreise C_i und C_j verkleben, wenn sie mindestens einen gemeinsamen Knoten v haben. Wir starten auf C_i bei einem Knoten $w \neq v$ und laufen in einer Richtung bis zu v , dann wechseln wir auf die Kanten von C_j bis wir wieder bei v gelangen. Ab dort gehen wir wieder auf C_i zum Ausgangsknoten w zurück. Abbildung 3 und der folgende Algorithmus veranschaulichen dieses Vorgehen.

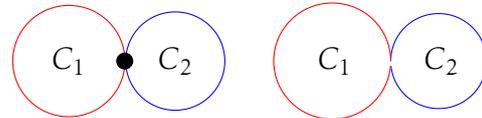


Abb. 3: Detailansicht – Verkleben von Kreisen.

```

input : Kreise  $C_1, \dots, C_k$ 
Initialisierung
 $C \leftarrow C_1$ ;                                     /* Hauptkreis */
 $\mathcal{I} \leftarrow \{1\}$ ;                             /* Indizes schon verklebter Kreise */
while  $\exists j \in [k] \setminus \mathcal{I}$  mit  $C_j \cap C \neq \emptyset$  do
    Verklebe  $C$  mit  $C_j$  am gemeinsamen Knoten;
     $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} + j$ ;
return  $C$ 
    
```

Behauptung. C ist ein Eulerkreis von G .

Angenommen C ist kein Eulerkreis. Dann existiert ein j , so dass C_j nicht an C geklebt wurde. Betrachte $x \in C$, $y \in C_j$ und einen Pfad $p : x \rightarrow y$. Sei e die erste Kante von p , mit $e \notin C$. Dann existiert auch ein j' mit $e \in C_{j'}$ und $C_{j'}$ ist nicht mit C verklebt.

Die Kante e und der Kreis C haben aber einen gemeinsamen Knoten, also gilt $e \cap C \neq \emptyset$. Da aber auch $e \cap C \subseteq C_{j'} \cap C$ gilt, folgt damit $C_{j'} \cap C \neq \emptyset$. Das heißt $C_{j'}$ und C sind nicht disjunkt. Das bedeutet aber, dass j' Kandidat in der While-Schleife ist und der Algorithmus mit dem aktuellen Kreis C nicht terminieren kann. \square

Bemerkung. Algorithmiker bevorzugen einen Beweis der den Eulerkreis direkt (ohne verkleben) erzeugt [Algorithmus von Fleury]. Dazu startet man in einem Knoten s und verlängert den Kantenzug schrittweise um je eine Kante. Die neue Kante muss dabei so gewählt werden, dass keine Kantenzüge isoliert werden, d.h. dass die Menge der noch nicht gewählten Kanten zusammenhängend bleibt.

Bemerkung. Eulerkreise können auch für gerichteten Graphen definiert werden. Die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Existenz ist in diesem Fall, dass für alle Knoten v gilt $\delta^+(v) = \delta^-(v)$.

7.2 \mathbb{F}_2 - und \mathbb{R} -Vektorräume eines Graphen

Knoten- und Kantenraum

Definition 7.3 Sei $G = (V, E)$ Graph mit $|V| = n, |E| = m$ und seien $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Dann definieren wir uns folgende Vektorräume über dem \mathbb{F}_2 :

- Knotenraum^{II}: \mathbb{F}_2^V mit $\dim(\mathbb{F}_2^V) = n$
- Kantenraum: \mathbb{F}_2^E mit $\dim(\mathbb{F}_2^E) = m$

Bemerkung. Allgemeines zu \mathbb{F}_2 -Vektorräumen:

- Kanonische Bilinearform in \mathbb{F}_2^d :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_i = y_i = 1 \text{ für ungerade viele } i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Bilinearform ist kein inneres Produkt, da sie nicht positiv definit ist, tatsächlich macht der Begriff *positiv* in endlichen Körpern keinen Sinn.

- Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}_2^d$ ein Untervektorraum und $\mathcal{F}^\perp := \{y \in \mathbb{F}_2^d : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in \mathcal{F}\}$
 - \mathcal{F}^\perp ist auch ein Untervektorraum.
 - $\dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}^\perp) = d$

^{II}Alternativ zur Notation \mathbb{F}_2^V werden auch die folgenden beiden Notationen für Knotenräume verwendet: V_G und 2^V . Dementsprechend wird der Kantenraum auch als E_G oder 2^E notiert.

Beweis. Sei M eine Matrix, deren Zeilen eine Basis für \mathcal{F} bilden. Es gilt $\text{Ker}(M) = \mathcal{F}^\perp$ und $\text{Im}(M^T) = \mathcal{F}$. Da Zeilenrang und Spaltenrang von M gleich sind gilt auch $\dim(\text{Im}(M^T)) = \dim(\text{Im}(M))$. Zuletzt verwenden wir noch den Dimensionssatz für lineare Abbildungen:

$$\underbrace{\dim(\text{Ker}(M))}_{\dim(\mathcal{F}^\perp)} + \underbrace{\dim(\text{Im}(M))}_{\dim(\mathcal{F})} = \dim(V) = d. \quad \triangle$$

Schnitt- und Zyklenraum

Definition 7.4 Der Zyklenraum $Z \subseteq \mathbb{F}_2^E$ ist das Erzeugnis der charakteristischen Vektoren von einfachen Kreisen in G . Die Elemente von Z heißen *Zykel*^{III} und $\dim(Z)$ die *zyklomatische Zahl* von G .

Proposition 7.5 Z wird auch schon von einfachen induzierten Kreisen erzeugt.

Beweis. In Abbildung 4 ist ein einfacher Kreis abgebildet, dieser ist kein induzierter Kreis, da eine Sehne existiert, die nicht zum Kreis gehört. Teilen wir den Kreis, so dass diese Sehne in beiden Teilen enthalten ist, so erhalten wir zwei induzierte einfache Kreise. Verknüpfen wir beide Kreise mit \oplus in \mathbb{F}_2 , so wird die Kante ausgelöscht. Es ist also ausreichend induzierte Kreise zu betrachten. \triangle

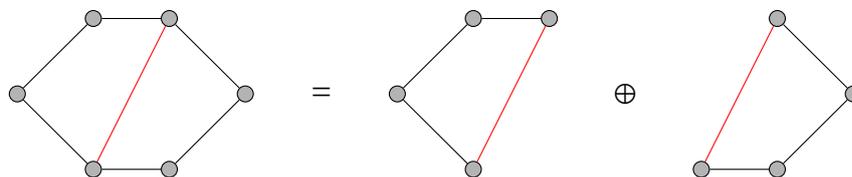


Abbildung 4: Z wird bereits von einfachen induzierten Kreisen erzeugt. Ist ein einfacher aber nicht induzierter Kreis gegeben, teilt man diesen so, dass die Nichtkreiskante in beiden Teilkreisen enthalten ist. Da wir uns im \mathbb{F}_2 befinden, wird diese Kante durch \oplus ausgelöscht.

Definition 7.6 $S \subseteq \mathbb{F}_2^E$ heißt *Schnittraum*, wobei S das Erzeugnis der charakteristischen Vektoren von Schnitten (X, \bar{X}) in G ist. Siehe Abbildung 5 (a).

Proposition 7.7 Der Schnittraum S wird von der Menge der Schnitte $(v, V - v)$ für alle $v \in X$ erzeugt.

Beweis. Sei $\chi(X, \bar{X})$ der charakteristische Vektor des Schnittes (X, \bar{X}) , d.h. $\chi(X, \bar{X})_i = 1$, wenn e_i im Schnitt ist und $\chi(X, \bar{X})_i = 0$ sonst.

Behauptung . Es gilt: $\chi(X, \bar{X}) = \sum_{x \in X} \chi(x, V - x)$.

^{III}Abweichend von der Definition von Zyklus in VL 3 gehört hier jeder geschlossene Kantenzug zu einem Zyklus.

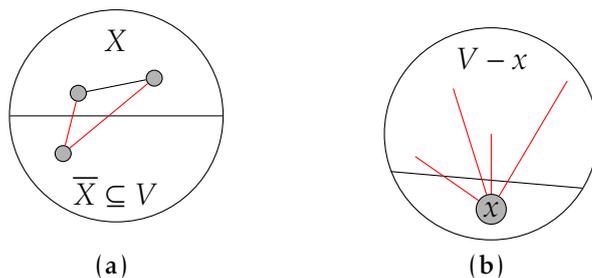


Abbildung 5: (a) zeigt einen von einer Knotenmenge X induzierten Schnitt. (b) zeigt den Schnitt einer einelementigen Knotenmenge x . In beiden Fällen sind die Schnittkanten rot.

Abbildung 5 (b) zeigt, wie ein von x induzierter Schnitt $(x, V - x)$ aussieht. Wir vergleichen nun die beiden Seiten der Gleichung komponentenweise, also Kante für Kante. Dabei unterscheiden wir die folgenden drei Fälle für eine Kante $e_i = \{u, v\}$:

1. Beide Endknoten der Kante liegen in \bar{X} :
 Dann ist $\chi(X, \bar{X})_{\{u,v\}} = 0$, da $u \in \bar{X}$ und $v \in \bar{X}$ werden u und v in der Summe $\sum_{x \in X} \chi(x, V - x)$ nicht betrachtet und an der entsprechenden Stelle im charakteristischen Vektor steht ebenfalls eine Null.
2. Beide Endknoten der Kante liegen in X :
 Dann ist $\chi(X, \bar{X})_{\{u,v\}} = 0$, da $u \in X$ und $v \in X$ ist $\chi(u, V - u)_{\{u,v\}} = 1$ und ebenso $\chi(v, V - v)_{\{u,v\}} = 1$. Da wir im \mathbb{F}_2 sind, folgt daraus $\sum_{x \in X} \chi(x, V - x)_{\{u,v\}} = 0$.
3. Ein Endknoten der Kante liegt in X und der andere in \bar{X} :
 Dann ist $\chi(X, \bar{X})_{\{u,v\}} = 1$. Angenommen $u \in X$, dann ist $\chi(x, V - x)_{\{u,v\}} = 1$ für $x = u$ und $\chi(x, V - x)_{\{u,v\}} = 0$ sonst. Also $\sum_{x \in X} \chi(x, V - x)_{\{u,v\}} = 1$ (Analog für $v \in X$).

Insgesamt folgt daraus $\chi(X, \bar{X}) = \sum_{x \in X} \chi(x, V - x)$. Das war die Behauptung. \triangle

\mathbb{F}_2 -Orthogonalität

Proposition 7.8 *Es gilt $Z = S^\perp$ und $S = Z^\perp$.*

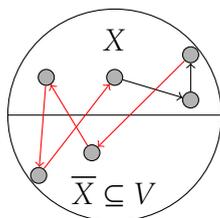


Abbildung 6: Betrachtet man einen Kreis C , so ist die Anzahl der Schnittkanten des Kreises gerade, da für jede Kante von X nach \bar{X} auch wieder eine Kante zurück existieren muss.

Beweis. Für alle Kreise C und Schnitte (X, \bar{X}) gilt: $|C \cap (X, \bar{X})|$ ist gerade, siehe Abbildung 6. Der Kreis C wechselt genau in den Schnittkanten $e \in C \cap (X, \bar{X})$ zwischen X und \bar{X} . Mit der Überlegung über die kanonische Bilinearform ist $\langle \chi(C), \chi(X, \bar{X}) \rangle = 0$. Für alle $x \in Z = \text{span}(\{\chi(C)\})$ und für alle $y \in S = \text{span}(\{\chi(X, \bar{X})\})$ gilt also: $\langle x, y \rangle = 0$ und somit $S \subseteq Z^\perp$ und $Z \subseteq S^\perp$.

Es gilt sogar Gleichheit: Sei $D \subseteq E$, so dass $\chi(D) \notin Z$, das heißt D lässt sich nicht als Vereinigung von Kreisen darstellen. Nun folgt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{es existiert ein Knoten } x_0 \text{ mit ungeraden Grad in } D \\ &\Rightarrow \langle \chi(D), \chi(x_0, V - x_0) \rangle = 1 \\ &\Rightarrow \chi(D) \notin S^\perp, \text{ also } S^\perp \subseteq Z \end{aligned}$$

Da wir $Z \subseteq S^\perp$ schon wussten gilt $S^\perp = Z$ (der erste Teil der Proposition). Klarerweise gilt damit auch $\Rightarrow (S^\perp)^\perp = Z^\perp$. Aus Dimensionsgründen gilt: $\dim(S) = \dim((S^\perp)^\perp)$. Außerdem folgt aus der Definition sofort $S \subseteq (S^\perp)^\perp$. Zusammengesetzt: $S = (S^\perp)^\perp = Z^\perp$ (der weite Teil der Proposition). \square

Satz 7.9 (Kreis-Schnitt-Baum-Theorem)

Ist $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$ ein Graph mit Komponenten G_1, \dots, G_k . Dann ist $\dim(Z) = m - n + k$ und $\dim(S) = n - k$.

Beweis. Sei T ein aufspannender Wald, das heißt $T = \cup_i T_i$ wobei T_i ein aufspannender Baum in G_i ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- Wenn $e \in T$, dann ist auch $e \in T_i$ für ein i (Abbildung 7 (a)). $T_i \setminus e$ zerfällt in zwei Bäume deren Knotenmengen wir mit X und Y bezeichnen wollen. Da G_i eine Zusammenhangskomponente ist, sind die Schnitte (X, \bar{X}) , (Y, \bar{Y}) und (X, Y) identisch. Wir nennen (X, Y) den von e_i in T erzeugten Fundamentalschnitt.
- Wenn $e \in E \setminus T$, dann hat e beide Endknoten in einer Komponente G_i (Abbildung 7 (b)). Da T_i ein aufspannender Baum von G_i ist enthält $T_i + e$ einen Kreis K , dies ist auch der einzige Kreis von $T + e$. Wir nennen K den von e mit T erzeugten Fundamentalkreis.

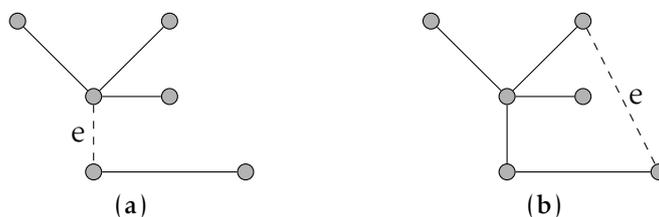


Abbildung 7: (a) ist die Darstellung des Falles $e \in T$ und (b) der Fall $e \notin T$.

Die charakteristischen Vektoren von Fundamentalschnitten und -kreisen liegen in \mathbb{F}_2^E und können als Zeilenvektoren in einer Matrix zusammengestellt werden. Das

Ergebnis sieht (wenn die Komponenten der Vektoren geeignet geordnet sind) so aus:

$$\begin{array}{l} \text{Fundamentalkreise} \\ \text{Fundamentalschnitte} \end{array} \begin{pmatrix} E \setminus T & T \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \ddots & \\ 0 & 1 \end{array} \right] & \star \\ \star & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \ddots & \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{pmatrix}$$

Die Fundamentalkreise sind liegen im Zykelraum Z und sind linear unabhängig, daher gilt $\dim(Z) \geq m - |E_T| = m - (n - k)$. Die Fundamentalschnitte liegen im Schnittraum S und sind ebenfalls linear unabhängig, daher gilt: $\dim(S) \geq |E_T| = n - k$. Zusammen mit $\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(S) + \dim(Z) = |E| = m$ bekommen wir in beiden Fällen Gleichheit. □

Kreise und Schnitte in gerichteten Graphen

Sei \vec{G} ein gerichteter Graph oder ein ungerichteter Graph mit einer beliebigen aber festen Orientierung.

Zu den Kreisen und Schnitten von G (ungerichtet) definieren wir uns Untervektorräume des \mathbb{R}^E .

1. Sei C Kreis mit fester Durchlaufrichtung. Wir definieren:

$$v_C(e) := \begin{cases} +1 & e \text{ Vorwärtskante in } C \\ -1 & e \text{ Rückwärtskante in } C \\ 0 & e \text{ nicht in } C \end{cases}$$

$Z := \text{span}(\{v_C : C \text{ ist gerichteter Kreis in } \vec{G}\})$ heißt Raum der Zirkulationen (Zirkulationen sind Flüsse ohne Quellen und Senken - Flusserhaltung gilt in jedem Knoten).

2. Sei (X, \bar{X}) Schnitt. In diesem Fall definieren wir:

$$v_X(e) := \begin{cases} +1 & \text{Anfangsknoten von } e \text{ in } X, \text{ Endknoten in } \bar{X} \\ -1 & v_X(-e) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$S := \text{span}(\{v_X : X \subseteq V\})$ heißt Schnittraum oder Cozyklenraum.

Proposition 7.10 Für alle $v \in Z$ und für alle $w \in S$ gilt $\langle v, w \rangle = 0$.

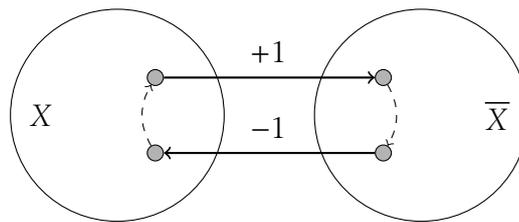


Abbildung 8: Darstellung der Reorientierung der Kanten, so dass jede Kante von X nach \bar{X} geht. Die -1 bedeutet, dass diese Kante umgedreht, das heißt mit -1 multipliziert wird.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für v_C und v_X und setze dann linear fort. Per definitionem gilt $\langle v_C, v_X \rangle = \sum_{e \in E} v_C(e) \cdot v_X(e)$. Reorientiere alle Kanten in (X, \bar{X}) , so dass sie von $X \rightarrow \bar{X}$ gehen, vergleiche hierzu Abbildung 8. Das heißt multipliziere sowohl $v_C(e)$ als auch $v_X(e)$ mit -1 , wenn die Kante e umgedreht werden muss. Daraus folgt, dass $v_C(e) \cdot v_X(e)$ unverändert bleibt. Da es in jedem Kreis genauso viele Kanten von X nach \bar{X} gibt, wie von \bar{X} nach X , gilt $\sum_{e \in E} v_C(e) \cdot v_X(e) = 0$. Also ist $Z \subseteq S^\perp$ und $S \subseteq Z^\perp$. Da für Fundamentalbasen wieder wie in Satz 7.9 $\dim(Z) \geq m - n + k$ und $\dim(S) \geq n - k$ gezeigt werden kann, folgt die Gleichheit. \triangle

Bemerkung. Es gilt also $\mathbb{R}^E = S \oplus Z$, wobei die Summe nicht nur direkt sondern sogar orthogonal ist.

Bemerkung. Im gerichteten Fall gilt auch immer $S \cap Z = \{0\}$. Im \mathbb{F}_2 Fall hingegen kann der Durchschnitt von S und Z auch nichttrivial sein. (Ein Beispiel ist der 6-Kreis, hier gilt $\mathbf{1} \in S \cap Z$).

Matrix-Baum-Theorem

Das Matrix-Baum-Theorem liefert eine Determinanten-Formel für die Anzahl der aufspannenden Bäume in G .

Definition 8.1 Sei G ungerichteter Graph mit n Knoten. Mit $L = D - A$ bezeichnen wir die Laplace-Matrix von G . Dabei ist D Diagonalmatrix mit den Knotengraden $(\deg(v_1), \dots, \deg(v_n))$ als Diagonaleinträge und A die Adjazenzmatrix von G . Mit L' bezeichnen wir einen Hauptminor von L , der durch Streichen der ersten Zeile und Spalte aus L entsteht^{IV}.

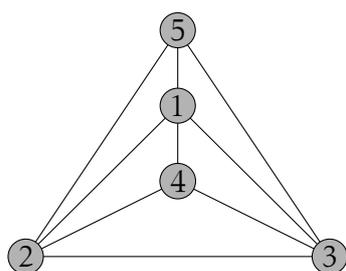
Satz 8.2 (ungerichtete Version)

Die Anzahl der aufspannenden Bäume in G ist $\det(L')$.

Dazu zunächst ein kleines Beispiel:

Beispiel. Sei G wie in Abbildung 1 abgebildet, also der K_5 ohne die Kante $\{4, 5\}$. Wir wissen aus VL 6 dass $T(K_n) = n^{n-2}$. Jeder Baum enthält $n - 1$ Kanten und aus Symmetriegründen ist jede der $\binom{n}{2}$ Kanten in gleich vielen Bäumen enthalten. Doppeltes abzählen ergibt, dass jede Kante in $2n^{n-3}$ Bäumen enthalten ist. Also gilt:
 $T(K_5 - \{4, 5\}) = 5^{5-2} - 2 \cdot 5^{5-3} = 75$.

Betrachten wir nun die Laplace-Matrix und die Determinante eines Minors:



$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \det(L') = 75$$

Abbildung 1: $K_5 - \{4, 5\}$ und die zugehörige Laplace-Matrix. L' ist ein Hauptminor.

Wir wollen eine stärkere gerichtete Version des Satzes beweisen. Dazu zunächst einige Vorbemerkungen zur Gestalt der Laplace-Matrix eines gerichteten Graphen:

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, wobei wir Mehrfachkanten zulassen wollen. Dann ist $M = (m_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n,n}$ mit $n = |V|$ die Laplace-Matrix von G und sieht wie folgt aus:

^{IV}Genaugogut könnten wir jedes andere Paar (Zeile i , Spalte i) aus L streichen um L' zu definieren

- $m_{ii} = \# \text{ Kanten } (v_i \rightarrow x) = \text{outdeg}(v_i)$
- $m_{ij} = (-1) * (\# \text{ Kanten } (v_i \rightarrow v_j))$ für $i \neq j$.

Als Hauptminor betrachten wir M' , der aus M durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht.

Eine Arboreszenz mit Wurzel v_i in D ist ein gerichteter aufspannender Baum $T = (V, B)$ mit $B \subseteq A$ und $\text{outdeg}(v_j) = 1$ für alle $j \neq i$. Wir definieren

$$T_1(D) := (\# \text{ Arboreszenzen in } D \text{ mit Wurzel } 1).$$

Die folgende Bemerkung verdeutlicht, wie man die gerichtete Version des Satzes auch auf ungerichtete Graphen anwenden kann.

Bemerkung. Die gerichtete Version des Satzes über die Anzahl der aufspannenden Bäume in G impliziert die ungerichtete Version. Ersetze alle Kanten im ungerichteten Graph G durch zwei Bögen zwischen den Endknoten, mit entgegengesetzter Richtung. In Abbildung 2 wird dies veranschaulicht. Die Anzahl der aufspannenden Bäume in G entspricht dann der Anzahl der Arboreszenzen von D mit Wurzelknoten 1. Außerdem gilt $M = L$, wobei M die Laplace-Matrix des gerichteten und L die des ungerichteten Graphen ist.



Abbildung 2: Umwandlung eines ungerichteten Graphen in einen gerichteten.

Die gerichtete Version von Satz 8.2 lautet dann:

Satz 8.3 (gerichtete Version)

Die Anzahl der Arboreszenzen in D mit Wurzelknoten 1 entspricht der Determinante eines Hauptminors der Laplace-Matrix. Also $T_1(D) = \det(M')$.

Beweis. Angenommen es existiert ein $i \geq 2$ mit $\text{outdeg}(v_i) \geq 2$, dann ersetze D durch D_1 und D_2 , so dass $\text{outdeg}(v_i) \geq 1$ in beiden gilt. Genauer gesagt D_1 und D_2 sind Kopien von D die alle Kanten von D enthalten bis auf einige Kanten, die v_i verlassen. Die Kanten die v_i verlassen werden zwischen D_1 und D_2 aufgeteilt, so dass jede dieser Kanten genau einmal vorkommt. Es gilt: $T_1(D) = T_1(D_1) + T_1(D_2)$. Andererseits gilt aufgrund der Linearität der Determinante auch: $\det(M') = \det(M'_1) + \det(M'_2)$, da für die i -te Zeile i gilt: $z^i = z_1^i + z_2^i$.

Teile den Graphen solange nach obigem Verfahren, bis für alle Knoten $v_i \neq v_1$ gilt: $\text{outdeg}(v_i) = 1$. Nur für $\text{outdeg}(v_1)$ gibt es keine Einschränkung. Die aus v_1 herausführenden Kanten haben aber weder Einfluss auf $T_1(D)$ noch auf $\det(M')$ also lassen wir sie einfach weg. Der verbleibende Graph hat $n - 1$ Kanten und jede Komponente von D ist eine in-Arboreszenz mit Wurzel v_1 oder ein gerichteter Kreis oder ein gerichteter Kreis zu dem in-Arboreszenzen führen, siehe Abb. 3.

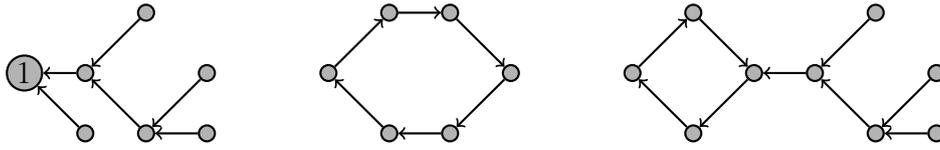


Abbildung 3: Mögliche Strukturen der Komponenten von D .

Wenn D einen Kreis C enthält, dann ist D kein Baum (Prop. 5.5) in diesem Fall gilt $T_1(D) = 0$. Wenn wir mit W die Knotenmenge des gerichteten Kreises bezeichnen, dann stellen wir fest, dass für alle $v_i \in W$ gilt $m_{ii} = \text{outdeg}(v_i) = 1$ und wenn $v_i \rightarrow v_j$ die Kante an v_i ist, gilt $m_{ij} = -1$. Daher gilt $\sum_{v_i \in W} M_i = \mathbf{0}$, das heißt die Spalten $(M_i)_{v_i \in W}$ von M sind linear abhängig und $\det(M') = 0$.

Wenn D keinen Kreis hat, ist D ein Baum (Prop. 5.5), tatsächlich sogar eine in-Arboreszenz mit Wurzel v_1 und es gilt $T_1(D) = 1$. In der Spalte s_i von M , die zu einem Blatt v_i gehört, gibt es genau eine 1 und zwar auf der Diagonalen. Wir entwickeln $\det(M')$ mit der Laplace-Regel nach Spalte s_i und stellen fest, dass $\det(M') = 1 \cdot \det(M'')$, wobei M'' Hauptminor zu einer in-Arboreszenz mit Wurzel v_1 auf einer kleineren Knotenzahl ist. Mit Induktion oder Iteration folgt dann $\det(M') = 1$.

Damit ist gezeigt, dass für jedes D gilt $T_1(D) = \det(M')$. □

Memory Wheels und das BEST-Theorem

Zunächst sprechen wir über Memory Wheels, die eigentlich schon in der vorigen Vorlesung eingeführt worden waren. Es stellt sich heraus, dass Memory Wheels im Grunde dasselbe sind wie Eulerkreise in einem de Bruijn Graphen. Wir betrachten dann Eulerkreise in gerichteten Graphen und beweisen für ihre Anzahl eine Formel in der nur die out-Grade von Knoten und die Anzahl der Arboreszenzen vorkommt.

Um die Anzahl der Memory Wheels zu bestimmen benötigen wir also die Anzahl der Arboreszenzen eines de Bruijn Graphen. Aus der vorigen Vorlesung (Matrix Baum Theorem) kennen wir eine Determinantenformel für diese Anzahl. Um die fragliche Determinante zu bestimmen studieren wir zuletzt die Eigenwerte der Laplace-Matrix von de Bruijn Graphen.

9.1 Memory Wheels und de Bruijn Graphen

Memory Wheels sind Folgen b_1, \dots, b_{2^n} mit $b_i \in \{0, 1\}$ und der Eigenschaft, dass jedes der 2^n möglichen 0-1-Wörter der Länge n in $b_1, \dots, b_{2^n}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ vorkommt. Offensichtlich kommt jedes der Worte dann genau einmal in der Folge vor.

Beispiel. $n = 3$: Die Zeichenkette 00010111|00 hat die Länge $2^3 + (3 - 1) = 8 + 2 = 10$ und jedes der acht dreistelligen (0-1)-Worte ist in dieser Zeichenkette vertreten. Zum Beispiel:

$$\underbrace{000}_{000} \ 1 \ \underbrace{011}_{011} \ \underbrace{1|00}_{100}$$

Einige Fragen zu Memory Wheels:

1. Existieren Memory Wheels für alle n ?
2. Wie viele verschiedene Memory Wheels gibt es?
3. Können Graphen beim Studium von Memory Wheels helfen?

Der de Bruijn Graph $\mathcal{B}_n(m)$ – Antwort 1

Wir beginnen damit die Frage nach der Existenz eines Memory Wheels für ein gegebenes n graphentheoretisch zu modellieren. Jedes binäre Wort der Länge n bildet einen Knoten in unserem Graphen. Zwei Knoten sind durch eine gerichtete Kante verbunden, wenn man den Endknoten der Kante aus dem Anfangsknoten erhalten kann, indem man alle Bits um eins nach links shiftet und am Ende ein neues Bit einfügt. So entsteht der de Bruijn Graph \mathcal{B}_n (in Abb. 1 sehen wir zwei Bilder die \mathcal{B}_4 darstellen^V). Wenn es uns gelingt in \mathcal{B}_n einen Kreis zu finden, der jeden Knoten genau einmal besucht, dann haben wir ein Memory Wheel konstruiert. Das Problem ob es in einem (gerichteten) Graphen G einen Kreis gibt der alle Knoten genau einmal besucht ist als (gerichtetes) Hamilton-Kreis-Problem bekannt. Das Problem ist in beiden Varianten NP-schwer. Dieser Modellierung liefert also kein direkt brauchbares Kriterium um zu entscheiden, ob ein Memory Wheel existiert.

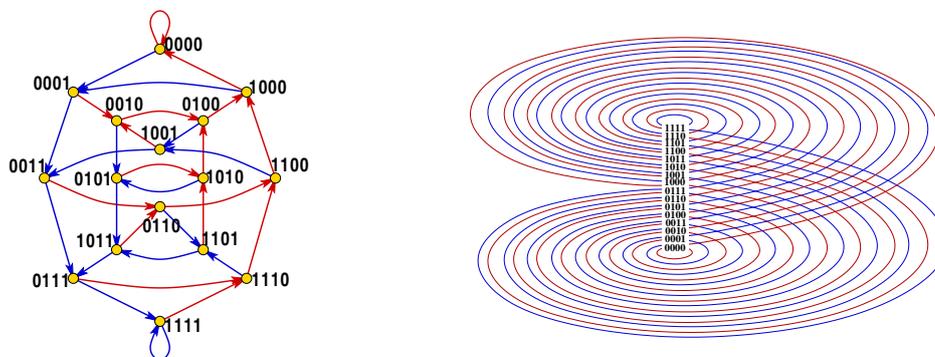


Abbildung 1: Zwei Bilder des de Bruijn Graphen \mathcal{B}_4 .

Einen neuen Zugang bekommen wir, indem wir die Kanten des de Bruijn Graphen \mathcal{B}_n beschriften. Jede Kante bekommt ein binäres Wort der Länge $n + 1$ zugewiesen, die ersten n Bits sind die des Anfangsknotens und das letzte Bit, ist das letzte Bit des Endknotens.

Beobachtung. Mit dieser Beschriftung haben wir eine Bijektion zwischen den Kanten von \mathcal{B}_n und den binären Wörtern der Länge $n + 1$ hergestellt.

Die Beschriftungen von zwei gerichtet aufeinanderfolgenden Kanten stimmen in den n Bits ihres gemeinsamen Knotens überein. Diese Tatsache führt uns zur folgenden Proposition:

Proposition 9.1 *Zwischen den Memory Wheels für binäre Wörter der Länge $n + 1$ und den Eulerkreisen in \mathcal{B}_n gibt es eine Bijektion.*

Beweis. (Memory Wheel \rightarrow Eulerkreis) Die ersten n Bits des Memory Wheels kodieren meinen Startknoten, die ersten $n + 1$ Bits meine Startkante, die aus den Startknoten in den Knoten geht, der durch die Bits 2 bis $n + 1$ kodiert wird. So können wir

^VDas rechte illustriert einen Zusammenhang mit dynamischen Systemen, siehe Wikipedia[en](de Bruijn Graph).

Kante für Kante einen Eulerkreis bauen. Weil jedes Wort im Memory Wheel genau einmal vorkommt, benutzen wir jede Kante genau einmal. Also haben wir zumindest einen Eulerweg. Da das Memory Wheel geschlossen ist können wir weitergehen, d.h. Startknoten und Endknoten sind gleich und wir haben einen Eulerkreis.

(Memory Wheel \leftarrow Eulerkreis) Zwei Kanten, die in einem Eulerkreis aufeinander folgen unterscheiden sich nur in einem Bit. Die n Endbits der ersten Kante, sind die n Anfangsbits der folgenden Kante. So trägt jede Kante (bis auf die Startkante) ein Bit zu einer Bitfolge S bei. Das Bit der Startkante bekommen wir, indem wir den Eulerkreis noch um den einen Schritt verlängern. Jede Kante und damit jedes binäre Wort der Länge $n + 1$ ist in S kodiert, d.h. S ist ein Memory Wheel. \square

Beobachtung. In \mathcal{B}_n existiert ein Eulerkreis

Beweis. Es gilt $\text{indeg}(v) = 2 = \text{outdeg}(v)$ für alle Knoten v (für das Wegshiften einer 1 und einer 0 gibt es jeweils eine eingehende Kante und für das Anhängen einer 1 und einer 0 jeweils eine ausgehende Kante). Zu dem ist \mathcal{B}_n stark zusammenhängend (das bedeutet, dass es zu je zwei Knoten u, v einen gerichteten $u \rightarrow v$ Weg gibt). Den starken Zusammenhang von \mathcal{B}_n kann man so sehen: Sei $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ ein beliebiger Knoten und $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ ein weiterer beliebiger Knoten, dann existiert ein gerichteter Kantenzug über folgende Knoten von b nach c .

$$[b_1, b_2, \dots, b_n] \rightarrow [b_2, \dots, b_n, c_1] \rightarrow \dots \rightarrow [b_n, c_1, \dots, c_n] \rightarrow [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

Damit sind die beiden Bedingungen für die Existenz eines Eulerkreises in einem gerichteten Graphen erfüllt. \triangle

Wir wissen nun also: Es gibt Memory Wheels für alle n .

Frage: Wie viele Memory Wheels für $n + 1$ gibt es?

Die Antwort auf diese unsere 2te Frage ist $2^{2^n - (n+1)}$. Die Anzahl ist verblüffend nahe an der einfachen oberen Schranke 2^{2^n} die man bekommt indem man sich klar macht, dass ein Eulerkreis mit Start im Knoten 0^n vollständig beschrieben ist, wenn man für jeden Knoten festlegt welche der beiden ausgehenden Kanten beim ersten Besuch genommen wird.

9.2 Zählen von Eulerkreisen in gerichteten Graphen

Der folgende Satz ist benannt nach de Bruijn, van Aardenne-Ehrenfest, Smith und Tutte, seinen Entdeckern oder, wenn wir keine Platonisten sind, seinen Erfindern.

Satz 9.2 (BEST-Theorem)

Sei D ein Eulerscher gerichteter Graph (d. h. $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$ für alle Knoten v und stark zusammenhängend), sei $T_v(D)$ die Anzahl der Arboreszenzen in D mit Wurzel v und $E_e(D)$ die Anzahl der Eulerkreise mit Startkante $e = (v, w)$. Dann gilt:

$$E_e(D) = T_v(D) \cdot \prod_{u \in V} (\text{outdeg}(u) - 1)!$$

Beweis. Wir wollen den Satz über eine Bijektion $\epsilon \leftrightarrow (A, \pi_1, \dots, \pi_n)$ beweisen, dabei handelt es sich bei ϵ um einen Eulerkreis, bei A um eine Arboreszenz und bei π_i um eine Permutation der out-Kanten von v_i die nicht in A sind.

Zu einem Eulerkreis $\epsilon = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ mit Startknoten $v = v_1$ und Startkante $e = e_1 = (v_1, v_2)$ betrachten wir den Last-Exit-Tree: Für jeden Knoten $w \neq v$ zeichnen wir die Kante aus, über die ϵ den Knoten zuletzt verlässt. Sei T die Menge der ausgezeichneten Kanten.

Wir wollen nun zeigen, dass es sich bei T um eine Arboreszenz handelt.

Es gilt $|T| = n - 1$, da jeder Knoten außer v eine Kante zu T beiträgt. T ist kreisfrei. Dies folgt per Widerspruchsbeweis: Angenommen T enthält einen Kreis aus Kanten $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$. Dann gelangt man über e_{i_k} wieder in den Startknoten der Kante e_{i_1} . Das liefert einen Widerspruch, da durch die last-exit-Wahl gilt $i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_1$.

Für alle $v_i \neq v_1$ speichern wir in π_i die Reihenfolge der ausgehenden Kanten in ϵ , dabei lassen wir die letzte Kante weg, sie ist Kante im last-exit-Tree. Für v_1 ist π_1 die Reihenfolge der ausgehenden Kanten in ϵ mit Ausnahme der ersten Kante e_1 .

Um zu zeigen, dass es sich bei unserer Abbildung um eine Bijektion handelt, zeigen wir, dass sie injektiv und surjektiv ist.

Die Abbildung $\epsilon \rightarrow (A, \pi_1, \dots, \pi_n)$ ist injektiv. Seien ϵ und ϵ' zwei Eulerkreise, die sich in mindestens einer Kante unterscheiden. Betrachte den Startknoten w , der ersten Kante, in der sich ϵ und ϵ' unterscheiden. Die Reihenfolge der Kanten ist hier unterschiedlich, dies spiegelt sich entweder in π_w oder in einer unterschiedlichen ausgehenden Kante im last-exit-Tree wieder. Das heißt (A, π_1, \dots, π_n) und $(A', \pi'_1, \dots, \pi'_n)$ sind unterschiedlich.

Die Abbildung $\epsilon \rightarrow (A, \pi_1, \dots, \pi_n)$ ist surjektiv. Aus (A, π_1, \dots, π_n) lässt sich ein Eulerkreis ϵ erzeugen, der auf das Starttupel abgebildet wird. Wir starten mit der vereinbarten Kante e . Wenn wir einen Knoten w erreicht haben finden wir die nächste Kante entweder in π_w oder wenn schon alle bis auf eine ausgehende Kante benutzt wurden im last-exit-Tree. Um zu zeigen, dass wir auf diese Weise einen geschlossenen Kantenzug konstruieren, der jede Kante genau einmal verwendet, nehmen wir an, alle Kanten an v_1 (der Wurzelknoten von A und Startknoten von e) sind benutzt, aber es gibt eine unbenutzte Kante f im Graphen. Da die Kante f noch nicht benutzt wurde, existiert an ihrem Endknoten w_1 eine Kante, die noch nicht benutzt wurde ($\text{indeg}(w_1) = \text{outdeg}(w_1)$). Insbesondere wurde die Kante, die w_1 zur Arboreszenz beiträgt, noch nicht verwendet. Indem wir das Argument je für den nächsten Knoten wiederholen, können wir einen Kantenzug aus nicht benutzten Kanten konstruieren, der in v_1 endet. Das ist ein Widerspruch. Das heißt, in dem konstruierten Kantenzug werden alle Kanten verwendet und der Kantenzug ist ein Eulerkreis. \square

Folgerung. Ist D eulersch, so ist $T_v(D) = T_w(D)$ für alle Knoten v und w .

9.3 Eigenwertversion des Matrix-Baum-Satzes

Lemma 9.3 Sei M eine $(n \times n)$ -Matrix mit $M\mathbf{1} = 0$ und $\mathbf{1}M = 0$ (alle Zeilensummen und alle Spaltensummen sind 0). Dann gilt: $\det(M - xI) = -xn \det(M') + x^2 \dots$, wobei M' der erste Hauptminor von M ist.

Beweis. Aus $M\mathbf{1} = 0$ folgt $\det(M) = 0$, also gilt für das charakteristische Polynom $\det(M - xI) = x(\dots)$. Die Zeilensummen von M sind 0, also entsteht aus $M - xI$, in dem wir alle Zeilen zur ersten hinzu addieren, eine Matrix der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} -x & \dots & -x \\ & M_1^* & \end{pmatrix}$$

Diese Matrix bezeichnen wir mit M_1 und vermerken, dass M_1^* der Matrix $M - xI$ ohne der ersten Zeile entspricht. Da die Determinante eine Multilinearform ist, gilt mit den bisherigen Überlegungen:

$$\det(M - xI) = \det(M_1) = -x \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & M_1^* & \end{pmatrix}$$

Nun können wir alle Spalten von M_1 zur ersten Spalte addieren. Auch die Spaltensummen von M sind 0, also ergibt sich Folgendes:

$$\det(M - xI) = -x \det \begin{pmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ -x & & & \\ \vdots & & M' - xI & \\ -x & & & \end{pmatrix}$$

Die Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte liefert die Behauptung. □

Beobachtung. Wenn M (über \mathbb{C}) die Eigenwerte (μ_1, \dots, μ_n) hat, dann gilt:

$$\det(M - xI) = \prod_{i=1}^n (\mu_i - x) \stackrel{\mu_1=0}{=} -x \prod_{i=2}^n (\mu_i - x) = -x \prod_{i=2}^n \mu_i + x^2(\dots)$$

Korollar 9.4 (Eigenwertvariante des Matrix-Baum-Satzes)

Wenn (μ_1, \dots, μ_n) die Eigenwerte der Laplacematrix von G sind, dann gilt:

$$T(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \mu_i$$

Beweis. Wir wissen, dass die Zeilen- und die Spaltensummen der Laplacematrix L null sind, das heißt $\mu_1 = 0$. Der Matrix-Baum-Satz besagt $T(G) = \det(L')$. Mit dem eben gezeigten Lemma und der Bemerkung folgt:

$$-x n \det(L') + x^2(\dots) = \det(L - xI) = -x \prod_{i=2}^n \mu_i + x^2(\dots)$$

Koeffizientenvergleich liefert: $\det(L') = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \mu_i$ □

Betrachten wir nun den gerichteten Fall. Sei D ein gerichteter Euler'scher Graph. Das heißt für alle Knoten $v \in V$ gilt $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$ und D ist stark zusammenhängend. Dann gilt, dass die Zeilen- und Spaltensummen der gerichteten Laplacematrix M null betragen. Daraus folgt: $T_v(D) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n \mu_i$, wobei wie gehabt $T_v(D)$ die Anzahl der Arboreszenzen mit Wurzel v bezeichnet und die μ_i die Eigenwerte von M sind (wir setzen $\mu_1 = 0$ voraus).

BEST-Theorem und Eigenwerte der Adjazenzmatrix

In dieser VL beschäftigen wir uns mit einer exakten Bestimmung der Anzahl der Arboreszenzen des de Bruijn Graphen. Daraus erhalten wir mit dem BEST-Theorem die Anzahl der Memory Wheels, diese Anzahl $2^{2^n - (n+1)}$ wurde in der vorigen VL schon genannt.

Anschliessend entwickeln wir einen Algorithmus, mit dem man aus primitiven Polynomen Memory Wheels erzeugen kann.

Im letzten Teil der VL wenden wir uns dann einem neuen Thema zu und betrachten die Eigenwerte von Adjazenzmatrizen (die Eigenwerte von Laplacematrizen haben im ersten Teil der VL eine Rolle gespielt).

Eigenwerte des de Bruijn Graphen $\mathcal{B}_n(m)$

Wir wollen nun allgemeine Memory Wheels und de Bruijn Graphen $\mathcal{B}_n(m)$ betrachten. Das bedeutet, wir lassen nicht nur beliebige Wortlängen n , sondern auch Alphabete beliebiger Größe m zu.

Auch in allgemeinen de Bruijn Graphen gibt es Eulerkreise. Die Anzahl dieser folgt über das BEST-Theorem aus der Anzahl der Arboreszenzen.

Lemma 10.1 *Sind u, w Knoten von $\mathcal{B}_n(m)$, dann existiert ein eindeutiger Pfad $u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n = w$ der Länge n .*

Beweis. Sei $u = [a_1 \dots a_n]$, $w = [b_1, \dots, b_n]$. Definiere $u_i = [a_{i+1} \dots a_n b_1 \dots b_i]$. Das bedeutet, der gewünschte Pfad entsteht dadurch, dass in den Startknoten nach und nach die Zeichen des Endknotens eingeschiftet werden. \triangle

Bemerkung. Man kann verschieden Varianten der de Bruijn Graphen betrachten. Erlaubt man vorne und hinten Shifts, dann entsteht ein symmetrischer, also ein ungerichteter Graph. Falls $m \geq n$ gilt, kann man den Graphen auf die Knoten einschränken, die nur aus unterschiedlichen Buchstaben bestehen.

Proposition 10.2 *Die Eigenwerte von $M(\mathcal{B}_n(m))$ sind 0 und m . Der Eigenwert 0 tritt einfach auf, m tritt $(m^n - 1)$ -fach auf.*

Beweis. Sei $A = (a_{i,j})$ die gerichtete Adjazenzmatrix von $\mathcal{B}_n(m)$, d.h. $a_{i,j} = 1$ wenn $i \rightarrow j$ eine Kante ist, ansonsten ist $a_{i,j} = 0$.

Es gilt $A^n = J$, wenn J die Matrix bezeichnet, in der überall Einsen stehen. Denn an Stelle (i, j) von A^n steht die Anzahl der gerichteten Wege von Knoten i zu Knoten j mit n Kanten. Im Lemma haben wir gezeigt, dass diese Anzahl immer 1 ist.

Die Matrix J hat den Eigenwert m^n zum Eigenvektor $\mathbf{1}$. Da $\text{rang}(J) = 1$ ist, hat J den Eigenwert 0 mit Vielfachheit $m^n - 1$. Damit folgt, dass auch A den Eigenwert 0 ($m^n - 1$)-fach besitzt. Zudem hat A den einfachen Eigenwert $m\xi$, wobei ξ eine n -te Einheitswurzel ist. Den Wert von ξ können wir wie folgt feststellen: $\text{spur}(A) = \sum_i a_{ii} = \#(\text{Schlaufen}) = m$, aber auch $\text{spur}(A) = \sum \mu_i = m\xi$. Daher ist $\xi = 1$.

Sei $M(\mathcal{B}_n(m)) = mI - A(\mathcal{B}_n(m))$, dann hat M den Eigenwert m mit Vielfachheit $m^n - 1$, denn jeder Eigenvektor zum Eigenwert 0 von A ist ein Eigenvektor zum Eigenwert m von M . Zudem hat M den Eigenvektor $\mathbf{1}$ mit Eigenwert 0. \square

Mit der Eigenwertvariante des Matrix-Baum-Satzes und unseren Überlegungen zu den Eigenwerten der Laplacematrix $M(\mathcal{B}_n(m))$ von $\mathcal{B}_n(m)$ bekommen wir:

Folgerung.

$$T_v(\mathcal{B}_n(m)) = \frac{1}{m^n} m^{m^n - 1} = m^{m^n - (n+1)}$$

Wenn D ein zusammenhängender 2-in-2-out Graph ist, dann gilt mit dem BEST-Theorem $E(D) = T_v(D) \cdot \prod_{w \in V} (2 - 1)! = T_v(D)$. Insbesondere gilt das für den de Bruijn Graphen \mathcal{B}_n . Das heißt, die Anzahl der Eulerkreise in \mathcal{B}_n und damit der Memory Wheels für binäre Wörter der Länge $n + 1$ beträgt $E(\mathcal{B}_n) = T_v(\mathcal{B}_n) = 2^{2^n - (n+1)}$.

Algorithmen für Memory Wheels

Statt den de Bruijn Graphen zu berechnen, der mit m^n Knoten sehr viel Speicherplatz benötigt, wollen wir zu einem gegebenen Wort (s_1, \dots, s_n) den Nachfolger s_{n+1} direkt berechnen.

Ein algebraischer Ansatz Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen Wörter der Länge n über $\mathbb{F}_p = \{0, \dots, p - 1\}$ bestimmen. Als Rekursionsansatz wählen wir

$$s_k = a_1 s_{k-1} + \dots + a_n s_{k-n}.$$

Mit den Anfangsbedingungen $s_{-i} = 0$ für alle $i \geq 1$ und beliebigem s_0 erzeugen wir eine unendlich lange Folge $\{s_k\}_{k=\infty}$.

Beobachtung 1. Wir können die Folge in beide Richtungen unendlich lang fortsetzen (das bedeutet natürlich, dass wir nur die Anfangsbedingungen $s_{-i} = 0$ für $1 \leq i < n$ setzen). Dabei nehmen wir an, dass $a_n \neq 0$ ist.

Beobachtung 2. Die Folge ist periodisch, weil Abschnitte der Länge n sie vollständig definieren und es nur endlich viele unterschiedliche Abschnitte der Länge n gibt.

Um die Länge der Periode zu bestimmen definieren wir ein Polynom mit den Koeffizienten der Rekursion: $P(x) = 1 - a_1 x - \dots - a_n x^n$. Dazu betrachten wir die Potenzreihe $S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j$.

Lemma 10.3 Wenn $s_0 = 1$, dann gilt $P(x)S(x) = 1$, also $S(x) = \frac{1}{P(x)}$.

Beweis. Sei $P(x)S(x) = \sum b_j x^j$, dann gilt:

$$b_0 = 1 \cdot s_0 = 1 \tag{10.1}$$

$$b_k = s_k - a_1 s_{k-1} - \dots - a_n s_{k-n} = 0 \tag{10.2}$$

Dabei gilt die zweite Gleichheit auf Grund der Rekursion. □

Sei von nun an $s_0 = 1$.

Lemma 10.4 Die minimale Periode r ist der minimale Wert für den $P(x)$ ein Teiler von $(1 - x^r)$ ist.

Beweis.

$$Q(x) := \frac{1 - x^t}{P(x)} = (1 - x^t)S(x) = s_0 + s_1 x + \dots + s_t x^t + \dots - s_0 x^t - s_1 x^{t+1} - \dots$$

Wenn t Periode der Folge (s_i) ist, dann heben sich die Terme ab Ordnung t auf und es handelt sich bei $Q(x)$ um ein Polynom. Ebenfalls gilt, falls $Q(x)$ ein Polynom ist, müssen sich die Terme höherer Ordnung aufheben, das heißt t ist Periode. Also gilt: $Q(x)$ Polynom $\Leftrightarrow t$ Periode. □

Wir greifen nun auf den folgenden Satz aus der Algebra zurück.

Satz 10.5 Für jede Primzahl p und jedes n gibt es Polynome vom Grad n in $\mathbb{F}_p[x]$ mit $P(X) \mid (1 - x^{p^n - 1})$ und $P(X) \nmid (1 - x^t)$ für alle $t < p^n - 1$.

Über Polynome $P(x)$ mit den Eigenschaften aus dem Satz weiß die Algebra^{VI} noch mehr zu sagen:

- $P(x)$ ist irreduzibel (d. h. es hat keine Teiler). Daher ist $\mathbb{F}_p(x)/P(x)$ ein endlicher Körper und isomorph zu \mathbb{F}_{p^n} .
- $P(x)$ besitzt eine primitive Wurzel (d. h. eine Wurzel, die die multiplikative Gruppe \mathbb{F}_{p^n} erzeugt).
- Es gibt genau $\frac{1}{n}\varphi(p^n - 1)$ solcher Polynome, wobei φ die Eulersche φ -Funktion ist, d. h. $\varphi(p^n - 1)$ ist die Anzahl der Zahlen $x < p^n - 1$ mit $\text{ggT}(x, p^n - 1) = 1$.

Beispiel. Für $p = 2$ sind die folgenden Polynome primitiv mit $n = 3, \dots, 7$.

$$x^3 + x + 1, \quad x^4 + x + 1, \quad x^5 + x^2 + 1, \quad x^6 + x + 1, \quad x^6 + x^5 + x + 1, \quad x^7 + x + 1$$

$P(x) = x^4 + x + 1$ passt zur Rekursion $s_i = s_{i-1} + s_{i-4}$ also: 0001111010110010001111...
So erhält man ein Memory Wheel, wenn man eine Periode auswählt und um eine 0 erweitert.

Bemerkung. Das Finden eines primitiven Polynoms zu (p, n) ist ein schwieriges Problem.

^{VI}In Wikipedia wird Berlekamp: *Algebraic Coding Theory* als Quelle angegeben. Man kann es aber auch im Abschnitt 7.4 von Roth: *Introduction to Coding Theory* finden

10.1 Eigenwerte der Adjazenzmatrizen

Sei G ein ungerichteter Graph und A seine Adjazenzmatrix. Weil A symmetrisch ist ist A über \mathbb{R} selbstadjungiert. Das bedeutet, es gilt $\langle A^T x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$. Daraus wiederum folgt, dass alle Eigenwerte von A reell sind und dass eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren existiert. Wenn v einer dieser Eigenvektoren ist, dann ist die Menge $W = \{w : \langle w, v \rangle = 0\}$ ein A -invarianter Unterraum.

Seien $\mu_1 > \dots > \mu_t$ die Eigenwerte von A mit den Vielfachheiten $m(\mu_i)$, es gilt:

1. $0 = \sum_i a_{ii} = \text{spur}(A) = \sum_{i=1}^t m(\mu_i)\mu_i$
2. $\forall x$ mit $\|x\| = 1$ gilt $\mu_1 \geq x^T Ax \geq \mu_t$ (Übung)
3. $\mathbf{1}^T A \mathbf{1} = 2|E|$
4. Aus 1, 2, 3 folgt $\mu_t < 0 < \mu_1$

Satz 10.6 Sei G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, $A = A(G)$, dann gilt:

1. $\mu \leq \Delta(G) = \Delta$, für alle Eigenwerte μ .
2. Δ ist Eigenwert $\Leftrightarrow G$ ist Δ -regulär
3. $-\Delta$ ist Eigenwert $\Leftrightarrow G$ ist Δ -regulär und bipartit
4. G ist bipartit und μ ist Eigenwert $\Rightarrow -\mu$ ist Eigenwert und $m(\mu) = m(-\mu)$
5. $\delta(G) \leq \mu_{\max} \leq \Delta(G)$
6. $\mu_{\min}(G) \leq \mu_{\min}(H) \leq \mu_{\max}(H) \leq \mu_{\max}(G)$ für jeden induzierten Subgraphen H .

Beweis.

1. Sei x Eigenvektor zum Eigenwert μ , sei p der Index für den gilt $|x_p| \geq |x_i| \forall i$. Wir skalieren x , so dass $x_p = 1$. Dann ergibt sich:

$$|\mu| = |\mu x_p| = \left| \sum a_{pl} x_l \right| \leq \sum a_{pl} |x_l| \leq \deg(p) x_p \leq \Delta x_p \leq \Delta$$

2. Wenn wir in der Ungleichungskette aus 1.) zu Beginn μ durch Δ ersetzen, dann muss überall Gleichheit gelten. Das bedeutet für alle $l \in N(p)$ gilt $|x_l| = |x_p| = 1$ und $\deg(p) = \Delta$. Wir können p jetzt durch einen Knoten aus seiner Nachbarschaft ersetzen und das Argument so auf dem ganzen Graphen fortsetzen, da G zusammenhängend ist. Folglich ist G Δ -regulär. Für die Umkehrung betrachtet man den Eigenvektor $\mathbf{1}$.

3. Sei x der Eigenvektor zum Eigenwert $-\Delta$. Wie in 1.) bzw. 2.) nehmen wir $x_p = 1$ an. Nun gilt:

$$\sum a_{pl} x_l = -\Delta x_p = -\Delta \Rightarrow x_l = -1 \forall l \in N(p)$$

Dieses Muster lässt sich auf den ganzen Graphen fortsetzen, so erhält man eine 2-Färbung (mit 1 und -1) des Graphen. Das bedeutet, der Graph ist bipartit.

4. Wir überlegen uns, dass ein bipartiter Graph $G(X, Y; E)$ eine Adjazenzmatrix der Form $A = \begin{pmatrix} O & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert μ . Dann gilt $By = \mu x$ und $B^T x = \mu y$. Also ist auch $(x, -y)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\mu$. Damit ist $(x, y)^T \rightarrow (x, -y)^T$ ein Isomorphismus zwischen den Eigenräumen zu den Eigenwerten μ und $-\mu$. □

5. und 6. Übung

Extremale Graphentheorie

Sei G ein Graph mit n Knoten und evtl. bestimmten Eigenschaften. Können wir eine untere bzw. eine obere Schranke für einen Parameter des Graphen angeben? Wir betrachten in diesem Kapitel:

- Obere Schranke für $|E|$ für K_k -freie Graphen
- Obere Schranke für $|E|$ für $T_r(t)$ -freie Graphen
- Untere Schranke für $\alpha(G)$

11.1 Wichtige Parameter eines Graphen

Wir erinnern an die Definition einer unabhängigen bzw. einer vollständigen Menge:

- $I \subset V$ ist eine *unabhängige Menge* in G , falls der induzierte Teilgraph $G[I]$ keine Kanten enthält.
- $I \subset V$ ist eine *vollständige Menge* (eine Clique) in G , falls der induzierte Teilgraph $G[I]$ isomorph zum vollständigen Graph ist: $G[I] \simeq K_{|I|}$. (Man sagt G sei K_n -frei, falls G keine Clique der Größe n enthält.)

Definition 11.1 (Wichtige Parameter eines Graphen: α , ω , χ und θ)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist die Unabhängigkeitszahl von G die Größe der größten unabhängigen Menge:

$$\alpha(G) = \max \{|I| : I \subset V \text{ unabhängig in } G\}$$

Die Cliquenzahl von G ist die die Größe der größten vollständigen Menge, was der Unabhängigkeitszahl des Komplements von G entspricht:

$$\omega(G) = \max \{|I| : I \subset V \text{ vollständig in } G\} = \alpha(\bar{G})$$

Die Färbungszahl von G ist die Größe der kleinsten Partition von V in unabhängige Mengen:

$$\chi(G) = \min \{t : \exists \text{ Partition } I_1, \dots, I_t \text{ von } V \text{ so dass alle } I_i \text{ unabhängig in } G \text{ sind}\}$$

Die Cliquenüberdeckungszahl von G ist die Größe der kleinsten Partition von V in vollständige Mengen:

$$\theta(G) = \chi(\bar{G}) = \min \{s : \exists \text{ Partition } C_1, \dots, C_s \text{ von } V \text{ so dass alle } C_i \text{ Cliques sind}\}$$

Proposition 11.2 Die Färbungszahl ist nie kleiner als die Cliquenzahl.

$$\chi \geq \omega$$

Beweis. Sei C eine Clique in G und I_1, \dots, I_t eine Partition von V in unabhängige Mengen. Da der Schnitt zwischen C und einer beliebigen Menge I_i der Partition maximal einelementig ist, gilt:

$$|C| = \left| C \cap \bigcup_{i=1}^t I_i \right| \leq \sum_{i=1}^t |C \cap I_i| \leq t.$$

Da die Ungleichung für Cliques und Partition beliebiger Größe gilt, gilt sie auch für die größte Clique und die kleinste Partition. \square

- Ungerade Kreise sind Beispiele von Graphen mit $\chi \neq \omega$, denn es gilt $\chi(C_{2k+1}) = 3$ und $\omega(G) = 2$.
- Ein Graph $G = (V, E)$ ist *perfekt* wenn für alle $W \subseteq V$ gilt $\chi(G[W]) = \omega(G[W])$. Wir werden perfekte Graphen in späteren Vorlesungen studieren.

11.2 Obere Schranke für $|E|$ für K_k -freie Graphen

Wir stellen zuerst fest, dass das Verbieten von Cliques der Größe $k + 1$ äquivalent ist zum Verbieten von Cliques der Größe $\geq k + 1$. Insofern können wir auch nach der maximal möglichen Kantenanzahl eines Graphen, der nur Cliques der Größe $\leq k$ enthält, fragen:

$$\max \left\{ |E| : \text{es gibt } G(V, E) \text{ mit } \omega(G) \leq k \right\} = ?$$

Intuitiv ist klar, dass inklusionsmaximale Cliques der Größe $< k$ Kanten „verschwenden“, sodass ein in Bezug auf die Kantenanzahl maximaler Graph nur maximale Cliques der Größe k haben sollte — eine Forderung, die vollständige k -partite Graphen erfüllen.

Wir machen diese Intuition zuerst für bipartite Graphen (nur maximale Cliques der Größe 2) explizit, was den Satz von Mantel (Prop. 11.4) liefert. Dann verallgemeinern wir dieses Resultat auf k -partite Graphen (nur maximale Cliques der Größe k), wodurch wir den Satz von Turan (11.5) erhalten.

Bipartite Graphen

Sei G ein bipartiter Graph, also $\chi(G) = 2$, mit n Knoten. Insbesondere ist G dreiecksfrei, d.h. $\omega(G) \leq 2$. Wir leiten zuerst eine obere Schranke für die Kantenanzahl eines bipartiten, dann für die eines dreiecksfreien Graphen her.

Proposition 11.3 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit n Knoten. Es gilt:

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Beweis. Für vollständige bipartiten Graphen K_{n_1, n_2} gilt $|E| = n_1 n_2$. Jeder bipartite Graph mit n Knoten ist Teilgraph eines K_{n_1, n_2} mit $n_1 + n_2 = n$. Daher gilt

$$|E| \leq \max \{n_1 n_2 : n_1 + n_2 = n\}.$$

Offenbar maximieren $n_1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ und $n_2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ die rechte Seite, d.h.

$$|E| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

□

Theorem 11.4 (Satz von Mantel)

Für die Anzahl der Kanten eines dreiecksfreien Graphen gilt:

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

und $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ist (bis auf Isomorphie) der eindeutige maximierende Graph.

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über n . Da wir im Induktionsschritt jeweils von $n - 2$ nach n schließen, brauchen wir zwei Induktionsanfänge: Für $n \in \{1, 2\}$ ist die Aussage offenbar wahr.

Sei $G = (V, E)$ nun ein dreiecksfreier Graph mit n Knoten und $\{u, v\} \in E$. Da u und v keinen gemeinsamen Nachbarn haben, gilt $(\deg(u) - 1) + (\deg(v) - 1) \leq n - 2$. Für die Anzahl der mit u oder v inzidenten Kanten gilt also:

$$1 + (\deg(u) - 1) + (\deg(v) - 1) \leq n - 1.$$

Auf $G' = G - u - v$, also den Graphen der sich durch Löschen der Knoten u und v (sowie aller inzidenten Kanten) ergibt, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$|E| \leq n - 1 + |E(G')| \leq n - 1 + \left\lfloor \frac{(n - 2)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4(n - 1) + (n - 2)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

Dass $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ der eindeutige kantenmaximale Graph ist, kann man genauso per Induktion zeigen. □

Der Satz von Turán

Theorem 11.5 Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und Cliquenzahl $\omega(G) \leq k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Der vollständige k -partite Graph K_{n_1, \dots, n_k} mit $\sum n_i = n$ und $|n_i - n_j| \leq 1$, der auch als Turán-Graph $T_k(n)$ bezeichnet wird, ist bis auf Isomorphie der einzige maximierende Graph.

Beispiel. Betrachte tripartite Graphen ($k = 3$) mit 10 Knoten. Die Schranke aus dem Satz ist $(1 - \frac{1}{3}) \frac{10^2}{2} = 33, \bar{3}$. Für die Kantenzahl des Turán-Graphen $T_3(10) = K_{4,3,3}$ gilt: $|E(K_{4,3,3})| = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 33$.

Beweis. [Beweis mittels Verschieben von Gewichten]

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Für einen Gewichtsvektor $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ mit $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ definieren wir den Gewichtsdruck

$$g(w) = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} w_i w_j.$$

Wir können g nutzen, um eine Aussage über die Kantenzahl von G zu machen, indem wir den „Einheitsgewichtsvektor“ $w_0 = \frac{1}{n} \mathbf{1}$ einsetzen: $g(w_0) = \frac{1}{n^2} |E|$.

Ein Maximierer w^{\max} von g liefert dann eine obere Schranke für $|E|$:

$$|E| \leq n^2 g(w^{\max}) \quad (*)$$

Nun zeigen wir die Existenz eines Maximierers w^{\max} , dessen Gewicht auf einer Clique gleichverteilt ist. Dabei verschieben wir das Gewicht iterativ auf die Clique, in dem wir in jedem Schritt aus einem Gewichtsvektor w einen neuen w' erzeugen, s.d. $g(w') \geq g(w)$.

1. Konzentriere das Gewicht auf einer Clique

Falls w das Gewicht noch nicht auf einer Clique konzentriert, dann gibt es $v_i, v_j \in V$ mit $w_i, w_j \neq 0$ und $\{v_i, v_j\} \notin E$. Seien

$$s_i := \sum_{v_k \in N(v_i)} w_k \quad \text{und} \quad s_j := \sum_{v_k \in N(v_j)} w_k$$

die Gewichte der Nachbarschaften von v_i und v_j . Wir nehmen an, dass $s_i \geq s_j$ gilt. Erzeuge nun einen neuen Gewichtsvektor w' durch Verschieben des Gewichts von Knoten v_j auf den Knoten v_i :

$$w'_i := w_i + w_j, \quad w'_j := 0, \quad \text{und} \quad w'_k := w_k \quad \forall k \neq i, j$$

Es gilt $g(w') \geq g(w)$, da

$$\begin{aligned} g(w') - g(w) &= (w'_i s_i + w'_j s_j) - (w_i s_i + w_j s_j) \\ &= s_i (w_i + w_j - w_i) - s_j w_j \geq 0. \end{aligned}$$

2. Verteile die Gewichte gleichmäßig auf der Clique

Sei C eine Clique, auf der sich die Gewichte von w konzentrieren. Falls die Gewichte der Knoten noch nicht gleich sind, so gibt es $v_i, v_j \in C$ mit $w_i > w_j$. Erzeuge nun einen neuen Gewichtsvektor w' durch gleichmäßiges Verteilen des Gewichts $w_i + w_j$ auf beiden Knoten v_i und v_j :

$$w'_i := w'_j := \frac{w_i + w_j}{2}, \quad \text{und} \quad w'_k := w_k \quad \forall k \neq i, j.$$

Es gilt $g(w') \geq g(w)$, da

$$\begin{aligned} g(w') - g(w) &= 2 \left(\frac{w_i + w_j}{2} \right) \left(1 - \frac{w_i + w_j}{2} \right) - w_i(1 - w_i) - w_j(1 - w_j) \\ &= \frac{1}{2} (w_i - w_j)^2 > 0 \end{aligned}$$

Sei w nun also ein Gewichtsvektor, der seine Masse gleichmäßig auf einer Clique C der Größe t verteilt, d.h. $w_i = \frac{1}{t}$ für alle $v_i \in C$. Dann gilt:

$$g(w) = \sum_{v_i \neq v_j \in C} w_i w_j = \sum_{v_i \neq v_j \in C} \frac{1}{t^2} = \frac{t(t-1)}{2} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

Die letzte Ungleichung folgt hier aus $t \leq \omega(G) \leq k$. Also gilt $g(w^{\max}) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right)$ und mit (*) ist der Satz bewiesen. \square

Beweis. [Beweis durch Induktion und Rechnung]

Wir verallgemeinern den Beweis des Satzes von Mantel (Prpp. 11.4): Falls G eine maximale Anzahl von Kanten hat, so enthält G mindestens eine k -Clique A . Nun können wir die Kanten in G aufteilen in die Kanten innerhalb von A , die Kanten innerhalb des Komplements $B = V \setminus A$ sowie die Kanten zwischen A und B . Für die Anzahl der Kanten in B können wir Induktion verwenden. Es gilt:

$$|E[A]| \leq \binom{k}{2}, \quad |E[B]| \leq \left(1 - \frac{1}{k} \right) \frac{(n-k)^2}{2}, \quad |\{vw \in E : v \in A, b \in B\}| \leq (n-k)(k-1)$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus der Tatsache, dass jeder der $n-k$ Knoten in B maximal $k-1$ Nachbarn in A haben kann, sonst gäbe es eine $k+1$ Clique. Die Behauptung folgt durch Ausrechnen der Summe. \square

Beweis. [Beweis, der uns ein maximierendes Beispiel schenkt]

Wir zeigen zuerst, dass ein kantenmaximaler Graph G isomorph zu einem vollständigen multipartiten Graphen K_{n_1, \dots, n_t} ist. Hierfür stellen wir die Knotenmenge V als disjunkte Vereinigung unabhängiger Mengen dar. Hilfsmittel ist die durch

$$u \sim v \iff uv \notin E$$

gegebene Relation auf V . Offenbar ist \sim symmetrisch und reflexiv (G ist einfach, enthält also keine Schleifen). Damit \sim eine Zerlegung von V in Äquivalenzklassen liefert, müssen wir Transitivität zeigen. Für allgemeine Graphen ist sie nicht gegeben, wohl aber für $K_1 + K_2$ -freie, d.h. falls es keine drei Knoten u, v, w gibt, so dass der induzierte Graph $G[u, v, w]$ genau eine Kante enthält.

Wir zeigen nun, dass jeder kantenmaximale Graph $K_1 + K_2$ -frei ist: Angenommen es gäbe $u, v, w \in V$ mit $vw \in E$ und $uv, uw \notin E$. Wir nehmen an, dass $\deg(v) \geq \deg(w)$ und unterscheiden zwei Fälle:

1. Falls $\deg(u) < \deg(v)$: Lösche u und verdopple v (d.h. wir führen einen neuen Knoten v' mit $N(v) = N(v')$ ein). Der neue Graph G' hat mehr Kanten als G und offenbar $\omega(G') \leq k$. Das steht im Widerspruch zur Maximalität von G .
2. Falls $\deg(u) \geq \deg(v)$: Lösche v, w und verdreifache u (d.h. wir führen neue Knoten u', u'' mit $N(u) = N(u') = N(u'')$ ein). Da die Kante vw nur einmal gelöscht wird, hat der neue Graph G' mehr Kanten als G ($3\deg(u) > \deg(u) + \deg(v) + \deg(w) - 1$), was wegen $\omega(G') \leq k$ im Widerspruch zur Maximalität von G steht.

Somit haben wir gezeigt, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf V ist. Also lässt sich V als disjunkte Vereinigung unabhängiger Mengen darstellen: $V = \bigcup_{j=1}^t I_j$ mit $|I_j| = n_j$. Ein kantenmaximaler Graph ist also isomorph zu einem K_{n_1, \dots, n_t} .

Aus der Forderung der K_{k+1} -Freiheit folgt $t \leq k$. Man überlegt sich nun noch, dass $t = k$ und $n_i \in \left[\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \right]$ die Kantenanzahl maximiert. Dafür kann man z.B. wieder Argumente aus dem ersten Beweis verwenden (zu K_{n_1, \dots, n_t} gehört eine Gewichtung mit $w_i = n_i/n$). □

Beweis. [Beweis mittels Cauchy-Schwarz-UG]

Wir verwenden eine untere Schranke für die Cliquenzahl,

$$\omega(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - \deg(v)}, \quad (\star)$$

welche sich direkt aus dem Satz von Wei (siehe VL 12) ergibt, sowie die bekannte Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\langle a, b \rangle^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2.$$

Wir definieren

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{n - \deg(v_i)}} \quad \text{und} \quad b_i = \sqrt{n - \deg(v_i)}$$

und bekommen wegen $\langle a, b \rangle = n$ die folgende Ungleichungskette:

$$n^2 = \langle a, b \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - \deg(v_i)} \cdot \sum_{i=1}^n (n - \deg(v_i)) \leq k(n^2 - 2|E|)$$

wobei wir für die letzten Ungleichung (\star) und die Voraussetzung $\omega(G) \leq k$ verwandt haben. Die Behauptung folgt durch Auflösung der Ungleichung nach $|E|$. □

Extremale Graphentheorie II

Beobachtung.

- Wenn $|E| > \frac{n^2}{4}$, dann existieren Dreiecke (gemeinsame Nachbarn zweier Knoten).
- Wenn $|E| > \frac{n^2}{4} + \delta$, dann existieren mindestens δ Dreiecke.

Beweis. Der erste Teil ist der Satz von Mantel (Prop. 11.4). Der zweite Teil ergibt sich durch iteratives Löschen einer Kante der (wegen Teil 1) an einem Dreieck beteiligt ist.

Satz 12.1 Wenn $|E| \geq \left(\frac{1}{4} + c\right)n^2$, dann enthält G mindestens $2c\binom{n}{3}$ Dreiecke.

Beweis. Wir beginnen mit einfachen Beobachtungen zu Dreiecken.

- Eine Kante (u, v) ist in mindestens $d_u + d_v - n$ Dreiecken enthalten.

Dies gilt weil $d_u + d_v \leq n + |N(u) \cap N(v)|$ und jeder Knoten in $N(u) \cap N(v)$ mit der Kante (u, v) ein Dreieck bildet.

Daraus folgt:

$$\# \text{Dreiecke} \geq \frac{1}{3} \sum_{uv \in E} (d_v + d_u - n) = \frac{1}{3} \left(\sum_v \sum_{u \in N(v)} d_v - n|E| \right) \stackrel{A}{=} \frac{1}{3} \left(\sum_v d_v^2 - n|E| \right).$$

Wir betrachten nun den Durchschnittsgrad d_{av} in G :

$$d_{av} = \frac{1}{n} \sum_v d_v \stackrel{B}{=} \frac{2|E|}{n} \geq \left(\frac{1}{2} + 2c\right)n \stackrel{C}{\geq} \frac{n}{2} \quad \text{und} \quad d_{av} - \frac{n}{2} \stackrel{D}{\geq} 2cn.$$

Ausserdem wenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Vektoren $\mathbf{1}$ und d an: $(\sum d_v)^2 \leq n \cdot (\sum d_v^2)$. Multiplikation mit n^{-2} liefert:

$$\frac{1}{n} \sum d_v^2 \geq \left(\frac{1}{n} \sum d_v\right)^2 \stackrel{E}{=} d_{av}^2.$$

Mit diesen Hilfsmitteln erhalten wir:

$$\begin{aligned} \# \text{Dreiecke} &\stackrel{A}{\geq} \frac{1}{3} \left(\sum_v d_v^2 - n|E| \right) \stackrel{E, B}{\geq} \frac{1}{3} \left(n \cdot d_{av}^2 - \frac{n^2}{2} d_{av} \right) = \frac{n \cdot d_{av}}{3} \left(d_{av} - \frac{n}{2} \right) \\ &\stackrel{D}{\geq} \frac{n \cdot d_{av}}{3} \cdot 2cn \stackrel{C}{\geq} 2c \frac{n^3}{3 \cdot 2} > 2c \binom{n}{3}. \end{aligned} \quad \square$$

Wir betrachten im Folgenden die maximale Kantenanzahl von Graphen auf n Knoten ohne H Subgraphen. Dafür stellen wir eine kompakte Notation bereit:

Definition 12.2 (Extremalfunktion)

$$\text{ex}(n, H) := \max(|E| : G = (V, E), \text{Graph ohne } H \text{ Subgraph}, |V| = n)$$

Mit dieser Notation können wir den Satz von Turán auch so schreiben:

$$\text{ex}(n, K_{k+1}) \leq \frac{k-1}{k} \cdot \frac{n^2}{2} \sim \frac{k-1}{k} \binom{n}{2}$$

Satz 12.3 (Erdős-Stone 1948)

Für den Turán-Graphen $T_{k+1}(r)$ gilt:

$$\text{ex}(n, T_{k+1}(r)) = \left(\frac{k-1}{k} + o(1)\right) \binom{n}{2}$$

Satz 12.4 (Erdős-Simonovits 1966)

Für jeden Graphen H mit $\chi(H) = k + 1$ gilt:

$$\text{ex}(n, H) = \left(\frac{k-1}{k} + o(1)\right) \binom{n}{2}$$

Wir folgern ein etwas schwächeres Ergebnis direkt aus Erdős-Stone. Unser Argument zeigt, dass die Färbungszahl von H die Grössenordnung von $\text{ex}(n, H)$ bestimmt.

Die Färbungszahl von H erzwingt, dass H nicht Teilgraph eines Turán-Graphen $T_k(r)$ sein kann, $\forall r$. Andererseits gibt es ein r , so dass H Teilgraph von $T_{k+1}(r)$ ist. Also gilt für großes n :

$$\text{ex}(n, H) \leq \text{ex}(n, T_{k+1}(r)) \quad \square$$

Beispiel.

1. $\text{ex}(n, \text{Oktaeder}) = \frac{n^2}{4} + o(n^2)$, Abb. 1 zeigt: $\chi(\text{Oktaeder}) = 3$.

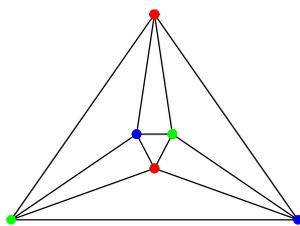


Abbildung 1: Der Graph des Oktaeders.

2. $\text{ex}(n, \text{Ikosaeder}) = \frac{n^2}{3} + o(n^2)$, es gilt: $\chi(\text{Ikosaeder}) = 4$
3. $\text{ex}(n, \text{Würfel}) = o(n^2)$, da der Würfel bipartit ist. Für bipartite H ist die genaue Bestimmung von $\text{ex}(n, H)$ schwierig.

Satz 12.5 Für den 4-Kreis C_4 gilt:

$$\text{ex}(n, C_4) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) n^{3/2}.$$

Beweis. (Kirschenzählen)

Ein Paar $(u, \{v, w\})$ mit $\{v, w\} \subseteq N(u)$ nennen wir Kirsche. Indem wir die u -Knoten der Kirschen betrachten, bekommen wir:

- # Kirschen = $\sum_u \binom{d_u}{2}$

Da unser Graph C_4 -frei ist gibt es zu jedem Paar v, w höchstens ein u , so dass $v-u-w$ eine Kirsche bildet. Daraus folgt:

- # Kirschen $\leq \binom{n}{2}$

Aus den beiden Abschätzungen für die Kirschenzahl folgt: $\sum d_u^2 \leq n(n-1) + \sum d_u = n(n-1) + 2|E|$.

Die mit Cauchy-Schwarz bewiesene Ungleichung $(\sum d_u)^2 \leq n \sum d_u^2$ kennen wir bereits. Zusammen ergibt das: $4 \cdot |E|^2 = (\sum d_u)^2 \leq n^2(n-1) + n2|E|$. Die Lösung der quadratische Gleichung liefert die gewünschte Schranke $|E| \leq \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}$. \square

Nun folgt ein kurzer Überblick zu den bekannten Schranken für die Extremalfunktionen einiger bipartiter Graphen. Dabei bezeichnet Q_3 den Würfelgraphen.

- $c_1 n^{3/2} \leq \text{ex}(n, Q_3) \leq c_2 n^{8/5}$, es wird vermutet, dass der Wert $c_2 n^{8/5}$ ist.
- $c_1 n^{9/8} \leq \text{ex}(n, C_8) \leq c_2 n^{5/4}$, allgemein wird vermutet $\text{ex}(n, C_{2k}) = \Theta(n^{1+(1/k)})$.
- $c_1 n^{5/3} \leq \text{ex}(n, K_{4,4}) \leq c_2 n^{7/4}$
- $\text{ex}(n, K_{s,t}) \leq c_s n^{2-(1/t)}$, $s \leq t \leq 1$

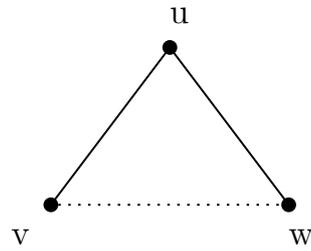


Abb. 2: Eine Kirsche. Die Kante zwischen v und w kann existieren, muss aber nicht.

12.1 Eine Schranke für die Unabhängigkeitszahl α

Zur Erinnerung: die *Unabhängigkeitszahl* von G die Größe der größten unabhängigen Menge:

$$\alpha(G) = \max \{|I| : I \subset V \text{ unabhängig in } G\}$$

Wenn wir eine maximale unabhängige Menge I betrachten, dann gilt $V = \bigcup_{v \in I} N[v]$ und also $n \leq \sum_{v \in I} d_v + 1 \leq |I|(\Delta + 1)$. Daraus folgt eine einfache untere Schranke an α :

$$\alpha \geq \frac{n}{\Delta + 1}$$

Mit einer kleinen wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegung^{VII} können wir eine Schranke herleiten die häufig besser ist: Erzeuge eine zufällige Teilmenge S von V indem jeder Knoten v mit Wahrscheinlichkeit p für S ausgewählt wird und zwar

^{VII}W-Theorie in der Nußschale gibt es im nächsten Kapitel.

unabhängig von anderen Knoten. Die erwartete Größe von S ist $\mathbf{E}(|S|) = p \cdot n$ und für die erwartete Kantenzahl von $G_{[S]}$ gilt

$$\mathbf{E}(|E_{[S]}|) = \sum_{e \in E} \Pr(e \in E_{[S]}) \stackrel{*}{=} \sum_{(u,v) \in E} \Pr(u \in S) \Pr(v \in S) = p^2 \cdot |E|.$$

Die Gleichung (*) folgt hier aus der Unabhängigkeit. Wenn wir von jeder Kante in $G_{[S]}$ einen der Endknoten löschen bekommen wir eine unabhängige Menge S' mit $|S'| \geq |S| - |E_{[S]}|$. Für den Erwartungswert dieser unabhängigen Menge gilt $\mathbf{E}(|S'|) \geq pn - p^2|E|$. Wegen $2|E| = nd_{av}$ bekommen wir mit der Wahl von $p = \frac{1}{d_{av}}$ die Ungleichung $\mathbf{E}(|S'|) \geq \frac{n}{2d_{av}}$. Aus der unteren Schranke an den Erwartungswert, für die Größe der unabhängigen Menge S' , folgt die Existenz einer unabhängigen Menge die mindestens diese Größe hat und also

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2d_{av}}$$

Achtung: Wahrscheinlichkeiten liegen im Intervall $[0, 1]$. Also gilt dieser Beweis nur für $p = \frac{1}{d_{av}} \leq 1$, also $d_{av} \geq 1$. Dass die Ungleichung sonst nicht immer gilt, sieht man z.B. an $G = ([5], \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$.

Eine noch etwas stärkere Schranke bekommt man mit dem Satz von Turán. Aus dem Satz folgt sofort $d_{av} \leq (1 - \frac{1}{\omega})n$ und also $\omega \geq \frac{n}{n-d_{av}}$. Diese untere Schranke an die Cliqenzahl übersetzt sich wegen $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$ und $d_{av}(G) = n - 1 - d_{av}(\bar{G})$ in die folgende Schranke für die Unabhängigkeitszahl:

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{d_{av} + 1}$$

Nun wollen wir aber endlich das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren.

Satz 12.6 (Wei 1981)

Für jeden Graphen G gilt:

$$\alpha(G) \geq \sum_v \frac{1}{d_v + 1}.$$

Beweis. Wir betrachten den Algorithmus MIN. In diesem und ebenso im Algorithmus MAX ist der Grad eines Knotens immer der Grad im aktuell gültigen Graphen.

```

MIN(G)
  while  $V_G \neq \emptyset$  do
     $x \leftarrow$  Knoten minimalen Grades
     $I \leftarrow I + x$ 
     $G \leftarrow G - N[x]$ 
  return I
    
```

Die Menge I ist offenbar unabhängig. Der Algorithmus gehört zur Familie der Greedy-Algorithmen (greedy=gierig) denn der Knoten x wird jeweils *kurzsichtig* als

der Knoten gewählt der für die folgende Iteration möglichst viele Knoten übrig lässt. Diese Vorgehensweise ist einfach, muss aber nicht das optimale Resultat liefern.

Für einen Graphen G definieren wir $A(G) = \sum_v \frac{1}{d_v+1}$. Nun betrachten wir die Differenz $A(G) - A(G - N[x])$:

$$A(G) - A(G - N[x]) \leq \sum_{v \in N[x]} \frac{1}{d_v + 1} \leq (d_x + 1) \frac{1}{d_x + 1} = 1.$$

Die erste Ungleichung gilt, da für jeden Knoten $u \notin N[x]$ der Grad d'_u in $G - N[x]$ kleiner oder gleich dem Grad d_u in G ist und also $\frac{1}{d_u+1} - \frac{1}{d'_u+1} \leq 0$. Für die zweite Ungleichung verwenden wir $d_v \geq d_x$.

Der A -Wert des Graphen reduziert sich in jedem Schleifendurchlauf um höchstens 1. Wenn der Algorithmus endet ist der A -Wert $A(\emptyset) = 0$, also gibt es mindestens $A(G)$ Schleifendurchläufe. Da der unabhängigen Menge in jedem Schleifendurchlauf ein neues Element hinzugefügt wird gilt also $|I| \geq A(G)$. \square

Wir geben nun einen zweiten Beweis des Satzes, dafür betrachten wir den folgenden Algorithmus **MAX**:

```

MAX( $G$ )
  while  $E_G \neq \emptyset$  do
     $x \leftarrow$  Knoten maximalen Grades
     $G \leftarrow G - x$ 
  return  $V_G$ 
    
```

Wiederum ist offensichtlich, dass der Algorithmus eine unabhängige Menge erzeugt. Zur Analyse betrachten wir erneut die Veränderung des A -Wertes in einem Schleifendurchlauf:

$$\begin{aligned} A(G - x) - A(G) &= \sum_{v \in N(x)} \frac{1}{d_v} - \sum_{v \in N[x]} \frac{1}{d_v + 1} \\ &= \sum_{v \in N(x)} \frac{1}{d_v(d_v + 1)} - \frac{1}{d_x + 1} \geq \sum_{v \in N(x)} \frac{1}{d_x(d_x + 1)} - \frac{1}{d_x + 1} \\ &= \frac{1}{d_x + 1} - \frac{1}{d_x + 1} = 0 \end{aligned}$$

Also kann der A -Wert insgesamt nur wachsen. Für eine unabhängige Menge I gilt $A(I) = \sum_{v \in I} 1 = |I|$. Daher gibt der Algorithmus eine unabhängige Menge zurück, deren Größe zumindest $A(G)$ ist. \square

Mehr zu $\alpha(G)$ und Ramsey-Theorie

In der 12. Vorlesung wurde die folgende untere Schranke an die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ studiert:

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1}.$$

Diese Ungleichung läßt sich nicht nur algorithmisch beweisen, sondern auch stochastisch, was wir in diesem Kapitel tun wollen. Zunächst müssen wir uns jedoch an einige Definitionen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie erinnern.

13.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie kurzgefasst

Wir beginnen mit der Definition des Wahrscheinlichkeitsraumes:

Definition 13.1 Seien Ω eine endliche Grundmenge und $\Pr : \Omega \rightarrow [0, 1]$, so dass

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) = 1.$$

dann bezeichnet (Ω, \Pr) einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung. Die Funktion \Pr in Definition 13.1 ist noch kein Wahrscheinlichkeitsmaß, kann aber kanonisch auf die gesamte Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ erweitert werden:

$$\Pr(A) = \sum_{\omega \in A} \Pr(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Mit dieser Erweiterung ist \Pr ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$.

Die Teilmengen eines Grundraumes Ω eines W-Raumes (Ω, \Pr) werden Ereignisse genannt. Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen unabhängig, falls gilt:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B). \quad (\text{Unabhängigkeit})$$

Zu einer (reellwertigen) Zufallsvariable (ZV) $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Erwartungswert als:

$$\mathbf{E}(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \Pr(\{X = x\}), \quad (\text{Erwartungswert})$$

wobei die zweite Summe eine Kurzschreibweise $\{X = x\}$ für das Urbild von $\{x\}$ unter X benutzt. Seien X, Y ZV und $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\mathbf{E}(X + t \cdot Y) = \mathbf{E}(X) + t \cdot \mathbf{E}(Y). \quad (\text{Linearität})$$

Die Berechnung des Erwartungswerts ist im Falle von $\{0, 1\}$ -Zufallsvariablen (also einer ZV, die nur die Werte 0 und 1 annimmt) besonders einfach. Sei B so eine Zufallsvariable, es gilt:

$$\mathbf{E}(B) = \sum_{b \in \{0,1\}} b \cdot \mathbf{Pr}(B = b) = 0 \cdot \mathbf{Pr}(B = 0) + 1 \cdot \mathbf{Pr}(B = 1) = \mathbf{Pr}(B = 1)$$

Beispiel. Wie viele Dreiecke hat ein zufälliger Graph auf n Knoten? Es sei G ein Zufallsgraph auf n Knoten. Der Graph G soll jede Kante $e \in \binom{[n]}{2}$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p := \mathbf{Pr}(e) = \frac{1}{2}$ enthalten. Man kann sich fragen, wie viele Dreiecke (3-Cliquen) G im Erwartungswert haben wird. Sei $X(G) :=$ Anzahl der Dreiecke in G . Der Graph G ist ein Ereignis und X ist eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert $\mathbf{E}(X)$ gesucht ist. Zur Vereinfachung erhält jede dreielementige Teilmenge $T \in \binom{[n]}{3}$ der Knoten noch eine Zufallsvariable

$$Y_T(G) := \begin{cases} 1, & T \text{ ist Dreieck in } G, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die die Kanten unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p im Zufallsgraphen G enthalten sind gilt $\mathbf{Pr}(Y_T = 1) = p^3 = 1/8$. Durch die Variablen Y_T drückt sich X leicht aus als

$$X(G) = \sum_{T \in \binom{[n]}{3}} Y_T(G),$$

und für den Erwartungswert von X gilt (wenn alle Summen als Summen über $T \in \binom{[n]}{3}$ interpretiert werden):

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum Y_T\right) = \sum \mathbf{E}(Y_T) = \sum \mathbf{Pr}(Y_T = 1) = \frac{1}{8} \binom{n}{3}.$$

13.2 Ein stochastischer Beweis der Schranke an $\alpha(G)$

Zum Beweis der Schranke an $\alpha(G)$ betrachten wir den diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{S}_n, \mathbb{U})$, wobei \mathbb{S}_n die symmetrische Gruppe und \mathbb{U} die Gleichverteilung auf \mathbb{S}_n , also $\mathbb{U}(\pi) = \frac{1}{n!}$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_n$. Zu einer gegebenen Permutation π betrachten wir die unabhängige Menge

$$I(\pi) := \{v \in V : \pi^{-1}(v) < \pi^{-1}(w) \quad \forall w \in N(v)\}.$$

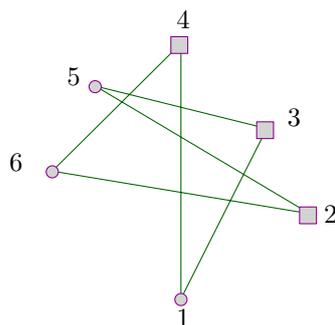


Abbildung 1: Beispiel für eine von einer Permutation induzierten Menge:

Für $\pi = (2, 6, 3, 5, 4, 1)$ ist die unabhängige Menge $I(\pi) = \{2, 3, 4\}$.

Ein $v \in V$ ist also in der Menge $I(\pi)$ wenn es das erste Element seiner geschlossenen Nachbarschaft $N[v]$ in π ist. Aus dieser Beschreibung folgt sofort, dass der bezüglich π zweite Knoten jeder Kante nicht in $I(\pi)$ ist. Also ist $I(\pi)$ eine unabhängige Menge in G . Abbildung 1 illustriert dies an einem Graphen mit 6 Knoten. Zieht man zufällig eine Permutation, so gilt folgendes Lemma:

Lemma 13.2 Für π aus der Gleichverteilung und $v \in V$ ist

$$\Pr(v \in I(\pi)) = \frac{1}{\deg(v) + 1}.$$

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, dass v als erstes Element seiner Nachbarschaft $N[v]$ in π steht, ist natürlich genau so groß wie für jedes andere Element aus $N[v]$, und $|N[v]| = \deg(v) + 1$. □

Satz 13.3 Es sei G fest und $X : (\mathbb{S}_n, \mathbb{U}) \rightarrow \mathbb{N}$ die Zufallsvariable $X(\pi) = |I(\pi)|$, die die Größe der unabhängigen Menge $I(\pi)$ misst. Für den Erwartungswert von X gilt:

$$\mathbf{E}(X) = \sum \frac{1}{\deg(v) + 1}$$

Beweis. Wir definieren erneut 0,1-Variablen

$$Y_v(\pi) := \begin{cases} 1, & v \in I(\pi) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und X ist natürlich die Summe der Y -Variablen, also gilt:

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum Y_v\right) = \sum \mathbf{E}(Y_v) = \sum \Pr(Y_v = 1) = \sum \frac{1}{\deg(v) + 1}.$$

Dabei kam Lemma 13.2 für das letzte Gleichheitszeichen zum Einsatz. □

Warum beweist Satz 13.3 die Schranke an $\alpha(G)$? Der Erwartungswert von X aus dem Satz liefert insbesondere die Existenz eines $\pi^* \in \mathbb{S}_n$ mit $X(\pi^*) \geq \mathbb{E}(X) = \sum \frac{1}{\deg(v)+1}$. Dieses π^* hängt natürlich von G ab.

Dieser Beweis ist weniger konstruktiv als die beiden Algorithmen aus der vorigen Vorlesung, welche die unabhängige Menge direkt ausgeben. Die Permutationen können aber genauso benutzt werden, man zieht einfach wiederholt mit Zurücklegen, bis man eine Permutation der erwünschten Größe gefunden hat, was die Frage nach der erwarteten Anzahl solcher Ziehungen aufwirft.

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie wird in den folgenden Kapiteln zu Ramsey-Zahlen und Kreuzungszahlen immer wieder als Beweisstrategie für Existenzaussagen herangezogen werden.

13.3 Ramsey Theorie

Zum Einstieg in die Ramsey Theorie betrachten wir die folgende Zahlensequenz der Länge $10 = 3^2 + 1$:

3 5 1 10 9 2 4 7 6 8

Wer genau hinschaut, findet „lange“ monotone Teilsequenzen:

	1		2	4		6	8	mon. steigend	
3	5	1	10	9	2	4	7	6	8
			10	9		7	6	mon. fallend	

In einer Sequenz der Länge 3^2 muss es im Allgemeinen keine monotone Teilfolge der Länge 4 geben. Hier ist ein Beispiel:

7 4 1 8 5 2 9 6 3

Das Beispiel zeigt, dass die Aussage im folgenden Lemma bestmöglich ist.

Lemma 13.4 (Erdős, Szekeres '35)

In jeder Folge $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ verschiedener Zahlen gibt es eine monotone Teilsequenz der Länge $> n$.

Beweis. Zum Beweis definieren wir uns Mengen S_k für $k = 0, \dots, n+1$. Das Element a_i ist in S_k wenn a_i letztes Element einer k -elementigen, aber keiner $k+1$ -elementigen, monoton wachsenden Teilfolge in a_1, \dots, a_i ist. Mit den so definierten Mengen unterscheiden wir zwei Fälle:

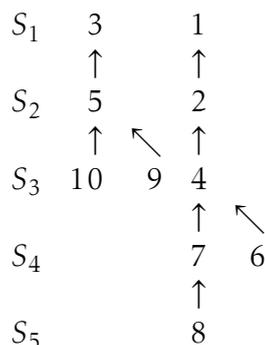
$[S_{n+1} \neq \emptyset]$ Per definitionem existiert dann eine wachsende Teilfolge der Länge $n+1$ und wir sind fertig.

$[S_{n+1} = \emptyset]$ Die Mengen S_1, \dots, S_n sind eine Partition der $n^2 + 1$ Folgenglieder in n Teile. Nach dem Schubfachprinzip muss eine der Mengen mindestens $n+1$ Elemente enthalten. Mit der folgenden Behauptung sind wir also auch in diesem Fall fertig.

Behauptung. Für jedes k sind die Elemente aus S_k eine fallende Teilfolge.

Bew. der Beh.: Für zwei Elemente $a_j, a_{j+m} \in S_k$ gilt stets $a_j > a_{j+m}$. Andernfalls könnte die in a_j endende Sequenz der Länge k um a_{j+m} zu einer $k+1$ -elementigen verlängert werden. Das steht aber im Widerspruch zu $a_{j+m} \in S_k$. \square

Beispiel. Die S_i aus Lemma 13.4 haben für die Beispielfolge 3, 5, 1, 10, 9, 2, 4, 7, 6, 8 die folgende Gestalt:



Satz von Ramsey

Zunächst werden wir den Satz von Ramsey in einer recht allgemeinen Version formulieren und beweisen. Anschließend werden wir uns dann Varianten des Satzes zuwenden, und einige interessante Folgerungen betrachten.

Der Vollständigkeit halber sei zunächst der hier verwendete Begriff von *Färbung* geklärt:

Definition 13.5 Sei S eine Menge und $t \in \mathbb{N}$. Eine t -Färbung von S ist eine Abbildung $\phi : S \rightarrow \{1, \dots, t\}$. Für eine t -Färbung nennen wir $R \subseteq S$ *monochromatisch in Farbe t* , falls $\phi(r) = t$ für alle $r \in R$.

Satz 13.6 (Satz von Ramsey)

Für $k, t, n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$ existiert eine Zahl $R_k = R_k(t, n_1, \dots, n_t)$ so dass für alle $N \geq R_k$ und alle t -Färbungen von $\binom{[N]}{k}$ ein $i \in \{1, \dots, t\}$ und ein $N_i \subseteq [N]$ mit $|N_i| \geq n_i$ existiert, so dass $\binom{[N_i]}{k}$ monochrom in Farbe i ist.

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion über die Parameter t, k, n_1, \dots, n_t . Zunächst betrachten wir $t = 2$ und $k = 1$, hier folgt $R_1(2, n_1, n_2) = n_1 + n_2 - 1$ aus dem Schubfachprinzip. Jetzt halten wir $t = 2$ fest und zeigen die Aussage mit Induktion nach k und n_1, n_2 . Für den Induktionsschritt beweisen wir die folgende Ungleichung:

$$R_k(2, n_1, n_2) \leq R_{k-1}(2, R_k(2, n_1 - 1, n_2), R_k(2, n_1, n_2 - 1)) + 1$$

Sei N zumindest so groß wie die Zahl auf der rechten Seite. Für $x \in [N]$ und eine 2-Färbung (rot-blau Färbung) ϕ von $\binom{[N]}{k}$ betrachten wir die k -Teilmengen, die x enthalten. Färbe die $k-1$ -Teilmengen S von $[N] \setminus x$ mit der Farbe der k -Teilmenge $S + x$

in ϕ . Die so induzierte Färbung liefert eine Menge von $R_k(2, n_1 - 1, n_2)$ Knoten deren $(k - 1)$ -Teilmengen alle rot sind oder eine Menge von $R_k(2, n_1, n_2 - 1)$ Knoten deren $(k - 1)$ -Teilmengen alle blau sind. Im zweiten Fall haben wir eine rote k -Hyperclique auf n_1 Elementen oder eine blaue k -Hyperclique auf $n_2 - 1$ Elementen. Da aber alle $k - 1$ -Mengen blau sind können wir x dazunehmen und bekommen so eine blaue k -Hyperclique mit n_2 Elementen. Der erste Fall funktioniert völlig analog.

Für den Induktionsschluss in der Induktion nach t zeigen wir:

$$R_k(t, n_1, \dots, n_t) \leq R_k(2, n_1, R_k(t - 1, n_2, \dots, n_t))$$

Sei N wieder zumindest so groß wie die Zahl auf der rechten Seite (dass die Zahl auf der rechten Seite existiert ist Teil der Induktionsvoraussetzung). Gegeben sei eine t -Färbung ϕ der k -Mengen von $[N]$. Wir erhalten eine 2-Färbung ϕ' , indem wir Farbe 1 beibehalten und alle anderen k -Mengen rot färben. Aufgrund der Wahl von N gibt es nun bezüglich ϕ' entweder eine n_1 -Menge in Farbe 1 oder eine $R_k(t - 1, n_2, \dots, n_t)$ -Menge in rot. Wiedereinsetzen der alten Farben $2, \dots, t$ liefert aufgrund der Definition von $R_k(t - 1, n_2, \dots, n_t)$ die Behauptung. \square

Ramsey-Theorie auf Graphen

Wir werden uns nun mit dem Spezialfall des Ramsey-Satzes 13.6 befassen, der im Zusammenhang mit Graphen besonders relevant ist, d.h. mit dem Fall $k = 2$. Wenn auch noch $t = 2$ angenommen wird, dann betrachten wir Färbungen der Kanten des K_n in zwei Farben, typischerweise rot und blau. Jeder einfache Graph $G = (V, E)$ auf n Knoten liefert eine Rotblaufärbung des K_n , indem E rot und $\binom{V}{2} \setminus E$ blau gefärbt werden. Die blau gefärbten Kanten sind genau die des zu G komplementären Graphen. Satz 13.6 liefert uns die Existenz eines n , ab dem der K_n bei beliebiger Rotblaufärbung stets eine rote oder eine blaue Clique einer gewissen Minimalgröße enthält.

14.1 Ramsey-Theorie auf Graphen

Definition 14.1 (Ramsey-Zahl)

Für $k, l \in \mathbb{N}$ definieren wir die Ramsey-Zahl

$$\mathcal{R}(k, l) := \min \{n \in \mathbb{N} : \forall \phi \text{ Rotblaufärbung enthält } K_n \text{ rote } k\text{- oder blaue } l\text{-Clique}\}.$$

Beobachtung. Für $n \geq \mathcal{R}(k, l)$ gilt für jeden Graphen G auf n Knoten $\omega(G) \geq k$ oder $\alpha(G) \geq l$. Δ

Zu zeigen, dass $\mathcal{R}(3, 3) = 6$ ist ein klassisches Puzzle der Unterhaltungsmathematik. Allgemein ist die exakte Bestimmung der Werte von $\mathcal{R}(k, l)$ ein extrem schwieriges Problem. Illustriert wird das durch ein Gleichnis von Paul Erdős (hier Zitiert nach Spencer):

Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5, 5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6, 6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens

Der folgende Satz liefert eine obere Schranke an $\mathcal{R}(k, k)$.

Satz 14.2 Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathcal{R}(k, k) \leq 2^{2^{k-1}} - 1.$$

Beweis. Es muss gezeigt werden, dass K_n bezüglich jeder Rotblaufärbung für $n \geq 2^{2k-1} - 1$ eine monochrome k -Clique enthält. Definiere $S^1 := [n]$ und $X := \emptyset$, $i := 1$ und färbe nun iterativ Knoten nach folgendem Schema:

1. Falls $S^i = \emptyset$ STOP, andernfalls fahre fort:
2. Wähle beliebigen Knoten x_i aus S^i und füge ihn zu X hinzu.
3. Es sei S^{i+1} die größere der beiden Nachbarschaften $N_r(x_i), N_b(x_i) \subseteq S^i$, wobei $N_r(x_i) := \{y \in S^i : \text{Kante } (x_i, y) \text{ ist rot}\}$ und $N_b(x_i)$ analog.
4. Färbe x_i in der Farbe seiner größeren Nachbarschaft.
5. $i := i + 1$

Behauptung $|S^i| \geq 2^{2k-i} - 1$.

Der Beweis erfolgt durch Induktion. Der Induktionsanfang gilt aufgrund der Wahl von S^1 . Im Schritt von $i \rightarrow i + 1$ gilt wegen der Wahl der größeren Nachbarschaft:

$$|S^{i+1}| \geq \frac{|S^i| - 1}{2} \stackrel{\text{i.V.}}{\geq} \frac{2^{2k-i} - 1 - 1}{2} = 2^{2k-(i+1)} - 1.$$

Der Algorithmus wählt daher mindestens $2k - 1$ Knoten aus und terminiert nicht vorher. Also muss X eine monochromatische Teilsequenz der Größe $\geq k$ besitzen. Diese Teilsequenz ist eine monochromatische Clique bezüglich der ursprünglichen Färbung, denn aus x_i rot folgt, dass alle Kante (x_i, x_j) mit $j > i$ rot sind. \square

Erdős entdeckte den folgende probabilistische Beweis einer untere Schranke:

Satz 14.3 Eine untere Schranke an $\mathcal{R}(k, k)$, $k \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{R}(k, k) > 2^{\frac{k}{2}}.$$

Beweis. Sei $n \leq 2^{\frac{k}{2}}$. Wir betrachten eine Zufallsfärbung ϕ des K_n , in der jede Kante $e \in \binom{[n]}{2}$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ rot gefärbt wird, ansonsten blau. Für ein $A \in \binom{[n]}{k}$ gilt:

$$\Pr(A \text{ mono. bzgl. } \phi) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}}_{A \text{ mono. rot}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}}_{A \text{ mono. blau}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Die Existenz einer monochromatischen k -Clique schreibt sich dann als Vereinigung aller solcher Ereignisse und lässt sich durch die Subadditivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes \Pr abschätzen:

$$\Pr(\exists A : A \text{ mono. bzgl. } \phi) = \Pr\left(\bigcup (A \text{ mono. bzgl. } \phi)\right) \leq \sum \Pr(A \text{ mono. bzgl. } \phi)$$

$$= \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{k}{2} - \frac{k^2}{2}} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k}{2}}}\right)^k \cdot \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{k!} < 1.$$

Dabei gilt die letzte Ungleichung weil für $k \geq 3$ beide Faktoren kleiner als 1 sind.

Aus $\Pr(\exists A : A \text{ mono. bzgl. } \phi) < 1$ folgt, dass es für $n \leq 2^{\frac{k}{2}}$ rot-blau Färbungen des K_n , ohne monochromatische k -Clique geben muss. \square

Die Schranke kann verbessert werden.

Beobachtung. Wenn eine Färbung des K_n bezüglich einer 2-Färbung insgesamt m monochromatische k -Cliquen besitzt und $m < n$, dann erhalten wir durch Löschung eines Knotens aus jeder monochromatischen Clique eine 2-Färbung des K_{n-m} ohne monochromatische k -Clique.

Diese Beobachtung lässt sich zu einer Verbesserung der unteren Schranke an $\mathcal{R}(k, k)$ ausbauen.

Satz 14.4 (Spencer '87)

Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Ramsey-Zahl nach unten beschränkt durch

$$\mathcal{R}(k, k) \geq \frac{k}{4} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

Beweis. Der Beweis geht in zwei Schritten vor. Zunächst bestimmen wir m so, dass es eine 2-Färbung mit höchstens m monochromatischen k -Cliquen gibt. Im zweiten Schritt wählen wir dann ein n so in Abhängigkeit von k , dass $n - m$ möglichst groß ist.

Sei $n \geq k$ zunächst beliebig gewählt. Wir betrachten eine zufällige 2-Färbung wie im Beweis zu Satz 14.3. Für $A \in \binom{[n]}{k}$ definieren wir die $\{0, 1\}$ -Zufallsvariable

$$X_A := \begin{cases} 1, & A \text{ monochromatisch gefärbt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X_A = 1$, haben wir uns schon überlegt:

$$\Pr(X_A = 1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1 - \binom{k}{2}}$$

Die erwartete Anzahl der monochromatischen k -Cliquen berechnet sich dann als

$$\mathbf{E}\left(\sum X_A\right) = \sum \mathbf{E}(X_A) = \sum \Pr(X_A = 1) = \binom{n}{k} 2^{1 - \binom{k}{2}} =: m_n.$$

Aus dem Erwartungswert folgt die Existenz einer Färbung ϕ_n , so dass K_n höchstens m_n monochromatische k -Cliquen bezüglich ϕ_n hat.

Sei nun $n := \frac{k}{e} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$. Das Löschen von m_n Knoten aus dem ϕ -gefärbten K_n induziert eine Färbung des K_{n-m_n} ohne monochromatische k -Clique. Wir finden nun zunächst eine geeignete Abschätzung für m_n .

$$m_n = 2 \cdot \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq 2 \cdot \frac{n^k}{k!} 2^{-\binom{k}{2}} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{k}{e} 2^{\frac{k-1}{2}}\right)^k}{k!} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} = 2 \cdot \frac{k^k}{e^k \cdot k!} \cdot 2^{\binom{k}{2}} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$$

Die Stirling-Formel besagt $k! \sim \frac{k^k}{e^k} \sqrt{2\pi k}$, damit kürzt sich praktisch alles weg und wir erhalten $m_n \leq \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \leq 1$. Also gibt es für $n = \frac{k}{e} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$ eine Färbung des K_{n-1} ohne monochromatische k -Cliques. Da die Euler-Zahl e kleiner ist als 4 gilt die Behauptung des Satzes. \square

Eine bessere obere Schranke

Die folgenden Schritte (ohne Beweis) führen zu einer besseren oberen Schranke als der in Satz 14.2 bewiesenen.

- $\mathcal{R}(k, l) \leq \mathcal{R}(k-1, l) + \mathcal{R}(k, l-1)$
- $\mathcal{R}(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$
- $\mathcal{R}(k, k) \leq \binom{2(k-1)}{k-1} \sim \frac{2^{2k}}{\sqrt{2k\pi}}$ (Stirling-Formel)

14.2 Eine Anwendung in der Geometrie

In diesem Abschnitt studieren wir Punktmenge in der Ebene. Die Punktmenge P sei dabei beliebig in allgemeiner Lage gewählt, das heißt, keine 3-Menge von P ist kollinear. Man kann sich fragen, ob es zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ eine Mindestgröße $N(n)$ der Punktmenge P gibt, die ein konvexes n -gon in P erzwingt. Diese Fragestellung ist als Happy End Problem bekannt geworden und wurde von Erdős und Szekeres mit ja beantwortet. Wir beweisen diesen Satz mit der erarbeiteten Ramsey-Theorie, unter Zuhilfenahme der folgenden zwei Lemmata:

Lemma 14.5 (Esther Szekerez (geb. Klein) '33)

Es sei P eine Menge von 5 Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage. Dann enthält P ein konvexes 4-gon.

Beweis. Betrachte die Ecken \bar{P} der konvexen Hülle von P . Aus der allgemeinen Lage folgt: $|\bar{P}| \geq 3$. Falls $|\bar{P}| \in \{4, 5\}$, haben wir direkt unser 4-gon gefunden. Falls $|\bar{P}| = 3$, so ist $\text{conv}(P)$ ein Dreieck, in dessen inneren zwei Punkte $u, v \in P \setminus \bar{P}$ liegen. Die durch u und v definierte Gerade schneidet das Dreieck $\text{conv}(P)$ in zwei Randkanten. Die beiden Eckpunkte der dritten Kante bilden gemeinsam mit u und v ein konvexes 4-gon, siehe Abb. 1. \square

Lemma 14.6 Sei P eine Punktmenge in allgemeiner Lage, so dass jede 4-Menge in P konvex ist. Dann ist P konvex.

Beweis. Betrachte die konvexe Hülle $\text{conv}(P)$ von P mit Eckpunkten $\bar{P} \subseteq P$. Dieses Polygon kann trianguliert werden. Angenommen, ein $p \in P \setminus \bar{P}$ liege im Inneren von P . Dann liegt es im Inneren eines Dreiecks der Triangulierung. Zusammen mit den

Konvexe Mengen in der Ebene

In der 14. Vorlesung haben wir den Satz von Erdős Szekeres kennengelernt. Wir haben gesehen, dass für eine beliebige natürliche Zahl n eine Zahl $N(n)$ existiert, sodass jede Punktmenge P in allgemeiner Lage, die groß genug ist ($|P| \geq N(n)$) ein konvexes n -gon enthält. Wir werden in dieser Vorlesung verschiedene obere Schranken von $N(n)$ kennenlernen.

15.1 Schranken an $N(n)$ mit Ramsey

Wir werden wieder ein Ramsey-Argument verwenden, dafür benötigen wir eine Färbung. Diesmal färben wir die 3-elementigen Teilmengen der Punktmenge wobei wir annehmen, dass die Punkte nummeriert sind, d.h. wir haben eine Bijektion zwischen der Punktmenge und den Zahlen in $[n]$. Bezüglich dieser Nummerierung kann ein Dreieck im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn orientiert sein. Die Orientierung verwenden wir um die Farbe des Tripels $\{i, j, k\}$, mit $i < j < k$, festzulegen, siehe Abb. 1.

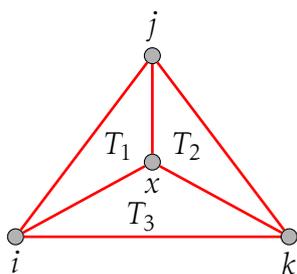


Abbildung 1: Links ein im Uhrzeigersinn orientiertes Dreieck, rechts eines im Gegenuhrzeigersinn.

Lemma 15.1 Sei P eine Punktmenge. Falls alle drei-elementigen Teilmengen von P monochrom rot bzw. blau sind, dann ist P konvex.

Beweis. (per Widerspruch) Angenommen alle 3-Teilmengen von P sind rot aber P ist nicht konvex. Dann existieren vier Punkte in nicht konvexer Lage, so dass alle 3 Teilmengen rot sind. Dann ergibt sich für die Punkte $i < j < k$ der konvexen Hülle dieser Menge die in Abb. 2 gezeigte Situation.

Wenn bei T_1 der Fall $x < i$ oder bei T_2 der Fall $x > k$ eintritt, dann haben wir einen Widerspruch zu $i < x < k$ und T_3 ist blau. Also muss $x > j$ und $x < j$ gelten, das ist aber auch unmöglich. □



Da $T_1 := (i, j, x)$ rot ist, folgt $x < i$ oder $x > j$.
 Da $T_2 := (j, k, x)$ rot ist, folgt $x < j$ oder $x > k$.
 Da $T_3 := (i, x, k)$ rot ist, folgt $i < x < k$.

Abbildung 2: Das rote Dreieck (i, j, k) und die Bedingungen für rote Teildreiecke.

Theorem 15.2 Für die Zahl $N(n)$ aus Satz 14.7 gilt $N(n) \leq R_3(n, n)$.

Beweis. [I - Tarsy] Wir benutzen die rot-blau Färbung aus Abb. 1. Da $|P| \geq R_3(n, n)$ existiert eine monochromatische n -Teilmenge Q . Aus Lemma 15.1 folgt, dass Q konvex ist. □

Beweis. [II von Theorem 15.2] Wir definieren eine 2-Färbung ϕ der 3-Mengen von P : eine 3-Menge wird durch ϕ rot gefärbt, falls die Anzahl der Punkte im Inneren des induzierten Dreiecks ungerade ist und blau wenn die Anzahl gerade ist. Da $|P| \geq R_3(n, n)$ existiert eine monochromatisch gefärbte n -Teilmenge $Q \subseteq P$. Aus dem nachfolgenden Lemma 15.3 folgt, dass alle 4-Teilmengen von Q konvex sind und daher mit Lemma 14.6 dass Q konvex ist. □

Lemma 15.3 Sei P eine Punktmenge. Vier Punkte von P in nicht konvexer Lage bestimmen eine bezüglich ϕ rote und eine bezüglich ϕ blaue 3-Menge.

Beweis.

Seien p, q, r, s vier Punkte von P in nicht konvexer Lage. Sei s der Knoten im Inneren des von der 3-Menge $\{p, q, r\}$ aufgespannten Dreiecks. Für $x \in \{p, q, r\}$ sei A_x die Anzahl der Punkte im Inneren des Dreiecks $\{p, q, r, s\} \setminus x$. Im Inneren des Dreiecks $\{p, q, r\}$ sind $A_p + A_q + A_r + 1$ Punkte, der Extrapunkt ist s . Wenn A_p, A_q und A_r alle die gleiche Parität haben, in Abb. 3 sind die zugehörigen Dreiecke rot, dann hat $A_p + A_q + A_r + 1$ die andere Parität, das Dreieck $\{p, q, r\}$ hat die andere Farbe. □

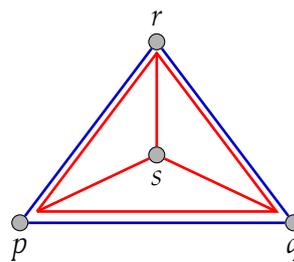


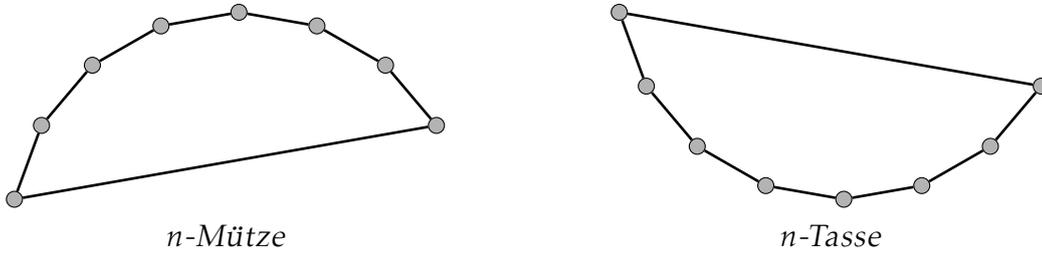
Abb. 3: Illustration zum Lemma.

15.2 Bessere obere Schranke

Wir werden im Folgenden mehr Geometrie verwenden und so eine bessere Schranken für $N(n)$ gewinnen. Dazu definieren wir:

Definition 15.4 (Mütze, Tasse)

Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge mit $n \in \mathbb{N}$ Punkten. Dann bildet P eine n -Mütze bzw. eine n -Tasse, falls alle $p \in P$ auf dem Rand von $\text{conv}(P)$ liegen und die Kante vom x -minimalen zum x -maximalen Punkt zu $\text{conv}(P)$ gehört, d.h. $\text{conv}(P)$ sieht wie folgt aus:



Theorem 15.5 Sei $f(n, m)$ die minimale Anzahl von Punkten in allgemeiner Lage, die eine n -Mütze oder eine m -Tasse erzwingen. Dann gilt

$$f(n, m) \leq \binom{n+m-4}{n-2} + 1$$

Beweis. (per Induktion)

IA: Für den Induktionsanfang setzen wir einen der beiden Parameter gleich 3. Es ist zu zeigen, dass $f(3, n) = f(n, 3) = n$. Wir behaupten, dass n Punkte ohne 3-Tasse eine n -Mütze sind. Um dies einzusehen, nummerieren wir n Punkte von links nach rechts. Der Punkt mit der kleinsten x -Koordinate erhält die Zahl 1, der Punkt mit der größten x -Koordinate erhält die Zahl n und die Punkte dazwischen erhalten die Nummer entsprechend der Reihenfolge ihrer x -Koordinate. Nun betrachten wir für geordnete 3-Teilmengen (i, j, k) mit $i < j < k$ von P die Orientierung der durch die dadurch induzierten Dreiecke. Falls eine 3-Teilmenge existiert, die ein gegen den Uhrzeigersinn orientiertes Dreieck induziert, so bildet diese 3-Teilmenge eine 3-Tasse. Andernfalls sind alle 3-Teilmengen im Uhrzeigersinn orientiert und P bildet eine n -Mütze. Der Induktionsanfang ist erfüllt, da

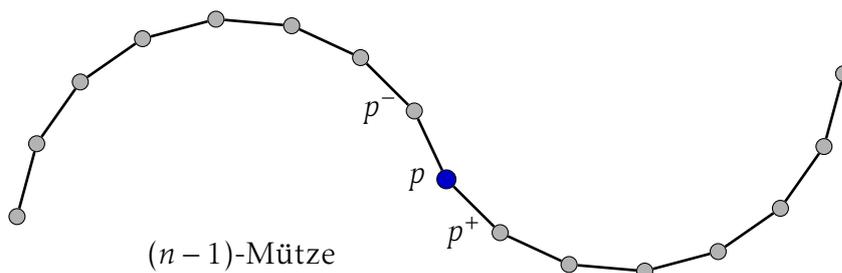
$$f(n, 3) = n \leq \binom{n+3-4}{n-2} + 1 = \binom{n-1}{n-2} + 1 = n - 1 + 1 = n$$

Analog gilt $f(3, m) = m$.

IS: Wir zeigen die Rekursion

$$f(n, m) \leq f(n, m-1) + f(n-1, m) - 1$$

per Widerspruch. Sei X eine Punktmenge mit $|X| = f(n, m-1) + f(n-1, m) - 1$. Angenommen X enthält keine n -Mütze und keine m -Tasse. Dann besitzt X eine $(m-1)$ -Tasse (wg. $|X| > f(n, m-1)$) und eine $(n-1)$ -Mütze (wg. $|X| > f(n-1, m)$). Wir definieren Y als die Punktmenge der linken Endpunkte von $(m-1)$ -Tassen in X . Dann enthält $\bar{Y} := X - Y$ keine $(m-1)$ -Tasse, da die linken Endpunkte der $(m-1)$ -Tassen fehlen. Folglich gilt $|\bar{Y}| < f(n, m-1)$ und somit $|Y| \geq f(n-1, m)$. Da $Y \subseteq X$, enthält Y keine m -Tasse, also eine $(n-1)$ -Mütze.



Wir definieren p als den letzten (d.h. x-maximalen) Knoten einer $(n-1)$ -Mütze in Y . Da $p \in Y$, ist p auch linker Endpunkt einer $(m-1)$ -Tasse. Wir betrachten nun den Außenwinkel $\alpha := \sphericalangle(p^-, p, p^+)$.

$\alpha \geq 180^\circ$:

The diagram shows three vertices p^- , p , and p^+ . p is the central vertex, highlighted in blue. p^- is above and to the left of p , and p^+ is below and to the right of p . The angle α at p is shown as an obtuse angle, indicated by a large arc. To the right of the diagram, the text reads: "Wir verlängern die $(n-1)$ -Mütze, indem wir den Knoten p^+ dazunehmen und erhalten eine n -Mütze."

$\alpha < 180^\circ$:

The diagram shows three vertices p^- , p , and p^+ . p is the central vertex, highlighted in blue. p^- is above and to the left of p , and p^+ is below and to the right of p . The angle α at p is shown as an acute angle, indicated by a small arc. To the right of the diagram, the text reads: "Wir verlängern die $(m-1)$ -Tasse, indem wir den Knoten p^- dazunehmen und erhalten eine m -Tasse."

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 f(n, m) &\leq f(n-1, m) + f(n, m-1) - 1 \\
 &\stackrel{IV}{\leq} \binom{n-1+m-4}{n-1-2} + 1 + \binom{n+m-1-4}{n-2} + 1 - 1 \\
 &= \binom{n+m-4}{n-2} + 1
 \end{aligned}$$

und somit die Behauptung □

Bemerkung. Die Schranke in Theorem 15.5 ist scharf.

Theorem 15.6 Wir bekommen nun eine obere Schranke für $N(n)$:

$$N(n) \leq f(n, n) \leq \binom{2(n-2)}{n-2} + 1 \approx \frac{1}{c\sqrt{n}} 2^{2(n-2)}$$

Literatur und Hintergrund

Die Schranke aus Satz 15.6 wurde schon von Erdős und Szekeres 1934 [1] bewiesen. Erdős und Szekeres [2] zeigten später auch eine untere Schranke

$$N(n) \geq 2^{n-2} + 1.$$

Die Vermutung ist, dass diese untere Schranke den tatsächlichen Wert von $N(n)$ angibt. Der größte exakt berechnete Wert ist $N(6) = 17$.

Die obere Schranke blieb mehr als 60 Jahre unverändert. 1998 gab es dann in kurzer Folge drei Verbesserungen in Arbeiten von Chung–Graham, Kleitman–Pachter sowie Tóth–Valtr. Der Stand der Dinge seitdem ist

$$N(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$$

das ist etwa die Hälfte der alten Schranke. Eine gute Übersicht über diese Entwicklungen gibt [3].

Statt nach konvexen Teilmengen kann man auch nach konvexen k -Löchern fragen, d.h. nach konvexen k Teilmengen A einer Punktmenge X , so dass die konvexe Hülle von A keine weiteren Punkte aus X enthält. Die Existenz von 5-Löchern wurde schon in den 70er Jahren gezeigt. Horton konstruierte eine unendliche Familie von Punktmenge ohne 7-Löcher. Gerken und (unabhängig) Nicolás gelang es 2005 zu zeigen, dass 6-Löcher auch existieren. Wie groß eine Menge sein muss damit sie ein 6-Loch enthält bleibt ungeklärt, Valtr [4] beweist eine Schranke und enthält weitere Literaturangaben zum Thema Löcher.

Literaturverzeichnis

- [1] P. ERDŐS AND G. SZEKERES, *A combinatorial problem in geometry*, *Compositio Mathematica*, 2 (1935), 463–470.
- [2] P. ERDŐS AND G. SZEKERES, *On some extremeum problem in geometry*, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, 3-4 (1960), 53–62.
- [3] G. TÓTH AND P. VALTR, *The Erdős-Szekeres theorem: upper bounds and related results*, in *Combinatorial and Computational Geometry*, MSRI, Cambr. Univ. Press, 2011, 557–568.
- [4] P. VALTR, *On empty pentagons and hexagons in planar point sets*, in *CATS*, 2012, 47–48.

Kreuzungszahlen

Wir betrachten in dieser Vorlesung Kreuzungszahlen. Kreuzungszahlen geben die minimale Anzahl von Kanten-Kreuzungen in einer Zeichnung eines Graphen in die Ebene an. Zu einem gegebenen Graphen suchen wir also eine Zeichnung, sodass sich möglichst wenige Kanten (Kurven oder Strecken) kreuzen. Zunächst werden Kreuzungszahlen definiert und ein kurzer Überblick gegeben. Anschließend werden wir verschiedene Kreuzungszahlen in einen Zusammenhang setzen und untere Schranken herleiten. Abschließend wird ein Problem vorgestellt, das wir mit Hilfe von Kreuzungszahlen elegant lösen können.

16.1 Einführung Kreuzungszahlen

Definition 16.1 Sei G ein Graph. Dann definiert

- $cr(G)$ die minimale Anzahl von (Kanten-)Kreuzungen in einer Zeichnung von G (d.h. Kanten sind einfache Kurven)
- $\overline{cr}(G)$ die minimale Anzahl von (Kanten-)Kreuzungen in einer gradlinigen Zeichnung (d.h. Kanten sind Strecken)

Kreuzungszahlen wurden vom ungarischen Mathematiker Pál Turán während des Zweiten Weltkriegs untersucht. Turán war interniert und musste in einer Backsteinfabrik arbeiten. Eine der Aufgaben war es Steine zwischen Brennöfen und Lagerräumen mit Loren zu transportieren. Zwischen den Brennöfen und den Lagerstellen verliefen Schienen, an Kreuzungen entgleisten die Loren gerne, das führte zu erheblicher Mehrarbeit. Daher war Turán an einer Minimierung der (Gleis-)Kreuzungen interessiert und fragte konkret nach der Kreuzungszahl von vollständig-bipartiten Graphen $K_{n,m}$. Dieses Problem wird daher auch als *brick factory problem* bezeichnet.

Wir geben zunächst eine kleine Übersicht über Vermutungen und Resultate zu Kreuzungszahlen:

- Zarankiewicz-Vermutung: $cr(K_{n,m}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$. Die Ungleichung " \leq " zeigt man mit einer Zeichnung (Kreuzförmig angeordnete Knoten).
- Guy-Vermutung: $cr(K_n) = \frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$. Hier für das " \leq " eine geeignete Zeichnung zu finden ist nicht so leicht.
- $\overline{cr}(G)$ und $cr(G)$ sind i.A. verschieden, z.B. gilt $cr(K_8) = 18$ und $\overline{cr}(K_8) = 19$.

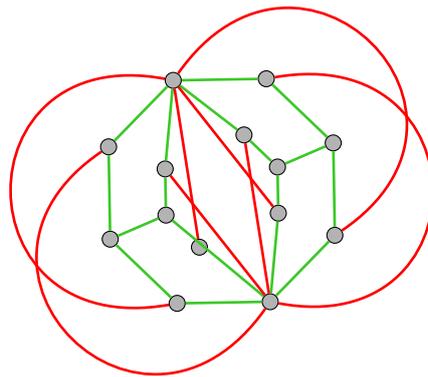
- $cr(K_n) \approx c \binom{n}{4}$. Bekannt ist, dass die Konstante c im Limes existiert sowie die Schranken ^{VIII} $c \in (0,311; 0,375]$ wobei $0,375 = \frac{3}{8}$. Eine Abschwächung der Guy-Vermutung ist: $c = \frac{3}{8}$.
- $\overline{cr}(K_n)$ ist für $n \in \{1, 2, \dots, 30\}$ bekannt, z.B. gilt $\overline{cr}(K_{30}) = 9726$.

16.2 Kreuzungszahlen: geradlinige Zeichnung vs. allgemeine Zeichnung

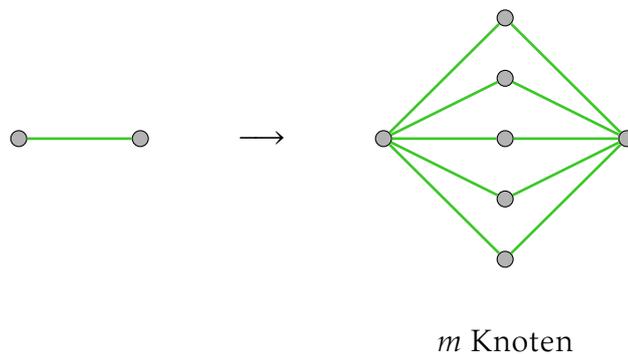
Wir vergleichen nun die Kreuzungszahlen $cr(G)$ und $\overline{cr}(G)$.

Beobachtung. Für jeden Graphen G gilt $cr(G) \leq \overline{cr}(G)$.

Wir stellen uns die Frage wie groß die Differenz $\overline{cr}(G) - cr(G)$ sein kann. Mit der folgenden Konstruktion kann gezeigt werden, dass diese Differenz unbeschränkt ist. Sei H wie folgt:



Wir sehen, dass insgesamt 4 rote Kreuzungen existieren, also $cr(H) \leq 4$. Aus H erhalten wir H_m , indem wir jede grüne Kante durch ein m -Bündel ersetzen.



^{VIII}Die untere Schranke stammt aus: *Improved bounds for the crossing numbers of $K_{m,n}$ and K_n* , E.de Klerk, J. Maharry, D.V. Pasechnik, R.B. Richter, G. Salazar, SIAM J. Discr. Math., 20, 189–202 (2006).

Da sich die roten und grünen Kurven in H_m nicht kreuzen gilt, dass $cr(H_m) = cr(H) \leq 4$. In jeder gradlinigen Zeichnung von H gibt es jedoch mindestens eine rot-grüne Kreuzung. Daher ist $\overline{cr}(H_m) \geq m$. Folglich ist $\overline{cr}(G) - cr(G)$ unbeschränkt.

16.3 Untere Schranken von Kreuzungszahlen

Proposition 16.2 *Ein planarer Graph G , das ist ein Graph mit $cr(G) = 0$, hat höchstens $3n - 6$ Kanten.*

Wir werden diese Proposition im Abschnitt über planare Graphen als Folgerung aus der Euler Formel beweisen, es geht aber auch direkt.

Beweis. Kantenmaximale planare Graphen, d.h. wenn das Hinzufügen einer beliebigen Kante zu einer nicht kreuzungsfreien Zeichnung führt, sind *Triangulierungen*. Wie der Name andeutet ist jede Fläche einer kreuzungsfreien Zeichnung ein Dreieck. Mit Induktion kann gezeigt werden, dass eine Triangulierung mit n Knoten genau $3n - 6$ Kanten hat. Die Aussage gilt für $n = 3$. Gegeben eine Triangulierung mit $n > 3$ Knoten. Sei v ein innerer Knoten und $\deg(v) = k$. Wenn wir v löschen entsteht ein „Loch“ dessen Rand ein Kreis der Länge k ist. In diesen Kreis können wir $k - 3$ nichtkreuzende Sehnen zeichnen und so das Ganze wieder zu einer Triangulierung machen (vorsicht ist geboten, denn wir könnten mit den neuen Sehnen Doppelkanten erzeugen). Jetzt haben wir eine Triangulierung mit $n - 1$ Knoten, also nach Annahme $3(n - 1) - 6$ Kanten. Die ursprüngliche Triangulierung hatte 3 Kanten mehr. \square

Proposition 16.3 *Sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten. Dann gilt*

$$cr(G) \geq m - (3n - 6)$$

1. Beweis. (per Induktion über m) Für $m \leq 3n - 6$ ist nichts zu zeigen, denn $cr(G) \geq 0$. Betrachten wir nun G mit $m > 3n - 6$ Kanten. Dann besitzt jede Zeichnung von G mindestens eine Kreuzung laut Proposition 16.2. Wir löschen eine Kante e , die an einer Kreuzung beteiligt ist und erhalten dadurch $G' := G - e$, mit $m' := m - 1$ und $cr(G') \leq cr(G) - 1$. Auf G' kann nun die Induktionsvoraussetzung angewendet werden. Also gilt

$$cr(G) \geq cr(G') + 1 \stackrel{IV}{\geq} [m' - (3n - 6)] + 1 = m - (3n - 6). \quad \square$$

2. Beweis. Betrachte eine Zeichnung von G . Sei H ein maximaler Subgraph mit n Knoten und ohne Kreuzungen. Dann gilt $|E_H| \leq 3n - 6$ gemäß Proposition 16.2. Außerdem gilt, dass jede Kante aus $E_G - E_H$ eine Kreuzung mit einer Kante aus E_H besitzt, da H maximal. Insgesamt gilt somit

$$cr(G) \geq |E_G - E_H| \geq m - (3n - 6). \quad \square$$

Proposition 16.4 Sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten. Dann gilt

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{6} \frac{m^2}{n} - O(m).$$

Beweis. Wir konstruieren eine Folge von Graphen $(G_i, H_i)_i$ nach folgender Vorschrift: Setze $G_0 := G$ und definiere H_0 als einen maximalen kreuzungsfreien Subgraphen von G_0 . Für $i = 1, 2, \dots$ definiere $G_i := G_{i-1} - E(H_{i-1})$ und H_i als einen maximalen kreuzungsfreien Subgraphen von G_i . Da wir nur endliche Graphen betrachten, ist die Folge endlich. Sei t entsprechend, so dass $G_t, H_t \neq \emptyset$ und $G_{t+1}, H_{t+1} = \emptyset$. Wir betrachten nun $(H_i)_{i=1}^t$. Per Konstruktion hat jede Kante aus H_i Kreuzungen mit H_0, H_1, \dots, H_{i-1} . Also hat H_i insgesamt $i|E(H_i)|$ Kreuzungen mit H_0, H_1, \dots, H_{i-1} . Insgesamt ergibt sich $\text{cr}(G) \geq \sum_{i=1}^t i|E(H_i)|$. Da wir eine untere Schranke für $\text{cr}(G)$ suchen betrachten wir folgendes Minimierungsproblem

$$\min \sum_{i \geq 1} i m_i \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i \geq 1} m_i = m \quad \text{und} \quad m_i \leq 3n - 6 \quad \text{für alle } i.$$

Anstelle der zweiten Bedingung betrachten wir vereinfachend $m_i \leq 3n$. Dieses Problem wird minimiert, indem wir möglichst viel „Gewicht“ auf die vorderen Terme schieben. Die ersten s Terme von m_i machen wir so groß wie möglich $m_i = 3n$, der $s + 1$ -ten Term übernimmt den Rest: $m - s \cdot (3n) < 3n$. Offenbar ist $s = \lfloor \frac{m}{3n} \rfloor$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \text{cr}(G) &\geq \sum_{i=1}^t i|E(H_i)| \geq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{3n} \rfloor} i(3n) = 3n \binom{\lfloor \frac{m}{3n} \rfloor + 1}{2} \\ &\geq 3n \frac{1}{2} \frac{m}{3n} \left(\frac{m}{3n} - 1 \right) = \frac{1}{6} \frac{m^2}{n} - O(m). \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

Falls wir Graphen mit ausreichen vielen Kanten betrachten, können wir die gefundene untere Schranke weiter verschärfen.

Theorem 16.5 (Crossing Lemma)

Sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten, sodass $m \geq 4n$. Dann gilt

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}.$$

Bevor wir das Crossing Lemma beweisen, betrachten wir zunächst, was wir im Unterschied zu Proposition 16.3 und 16.4 durch die zusätzliche Struktur von G gewinnen. Sei $m = n^{1+a}$, dann liefert

- Proposition 16.3: $\text{cr}(G) \geq c_1 n^{1+a} - O(n),$
- Proposition 16.4: $\text{cr}(G) \geq c_2 n^{1+2a} - O(m),$

- Theorem 16.5: $\text{cr}(G) \geq c_3 n^{1+3a}$.

Es sind noch weitere Verbesserungen des Crossing Lemmas bekannt, jedoch nur in der Konstante. Bis auf die Konstante sind die Größenordnungen im Crossing Lemma bestmöglich.

Beweis. Wir betrachten eine kreuzungsminimale Zeichnung von G und wählen einen zufälligen Subgraphen H dieser Zeichnung, indem wir die Knoten unabhängig mit gleicher Wahrscheinlichkeit p beibehalten. Dadurch ergibt sich für H die erwartete Knotenanzahl $\mathbf{E}(|V_H|) = np$ sowie die erwartete Kantenanzahl $\mathbf{E}(|E_H|) = mp^2$. Wir definieren die Zufallsvariable $X(H)$ als die Kreuzungen von H in der induzierten Zeichnung. Wir interessieren uns nun für die erwartete Anzahl von Kreuzungen in H , also $\mathbf{E}(|X(H)|)$. Damit eine Kreuzung aus G in H beibehalten wird, müssen alle vier Knoten der an der Kreuzung beteiligten Kanten gewählt werden. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit p^4 . Daher gilt $\mathbf{E}(|X(H)|) = |X(G)|p^4$.

Aus Proposition 16.3 folgt, dass $|X(H)| \geq |E_H| - (3|V_H| - 6) \geq |E_H| - 3|V_H|$. Daraus folgt mit der Linearität des Erwartungswertes, dass $\mathbf{E}(|X(H)|) \geq \mathbf{E}(|E_H|) - 3\mathbf{E}(|V_H|)$ gilt. Insgesamt gilt also

$$|X(G)|p^4 = \mathbf{E}(|X(H)|) \geq mp^2 - 3np.$$

Die Wahrscheinlichkeit p wird nun geschickt als $p = \frac{4n}{m}$ festgelegt. Dies ist zulässig, da laut Voraussetzung $m \geq 4n$ und somit $p \leq 1$. Damit gilt

$$\text{cr}(G) = |X(G)| = \frac{\mathbf{E}(|X(H)|)}{p^4} \geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3} = m \frac{m^2}{16n^2} - 3n \frac{m^3}{64n^3} = \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}. \quad \square$$

16.4 Anwendung: Einheitsabstände

In diesem Abschnitt stellen wir eine Anwendung des Crossing Lemma vor um eine obere Schranke an die maximale Anzahl von Einheitsabständen auf einer Punktmenge mit n Punkten herzuleiten. Sei $U(P)$ die Anzahl von Einheitsabständen auf einer Punktmenge P in der Ebene und $U(n) = \max(U(P) : |P| = n)$. Erdős hat gezeigt, dass gilt

$$c_1 n^{1+\frac{c}{\log \log n}} \leq U(n) \leq c_2 n^{\frac{3}{2}}.$$

Szemerédi und Trotter konnten die obere Schranke verringern auf $U(n) \leq c_3 n^{\frac{4}{3}}$.

Theorem 16.6 Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine n -elementige Punktmenge. Dann gilt $U(P) \leq 4n^{\frac{4}{3}}$.

Beweis. Sei P eine n -elementige Punktmenge in der Ebene. Wir können annehmen, dass jeder Punkt an mindestens zwei Einheitsabständen beteiligt ist, andernfalls kann er verschoben werden, bis er es ist.

Nun betrachten wir um jeden Punkt $p \in P$ den Einheitskreis K_p . Der Kreis K_p enthält k Punkte genau dann wenn p an k Einheitsabständen beteiligt ist genau dann wenn K_p in k Kreisbögen zerfällt. Daraus folgt, dass die Anzahl der Kreisbögen genau $2U(P)$

Der Satz von Hanani-Tutte und die Moon-Konstruktion

HT.1 Satz von Hanani-Tutte

Satz HT.1 (Schwacher Satz von Hanani-Tutte)

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn es eine Zeichnung von G gibt, sodass es zwischen jedem Paar von Kanten eine gerade Anzahl an Kreuzungen gibt.

Beweis. [Induktiver graphentheoretischer Beweis]

Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über die Anzahl der Knoten und Kanten. Für diesen Beweis benötigen wir eine etwas stärkere Behauptung, die uns den Induktionsschritt ermöglicht. Außerdem erlauben wir hier Mehrfachkanten und Schleifen.

Behauptung. Wenn es eine Zeichnung von G gibt, sodass es zwischen jedem Paar von Kanten eine gerade Anzahl an Kreuzungen gibt, so existiert eine planare Zeichnung von G mit dem selben Rotationssystem.

Sei nun eine solche Zeichnung von G gegeben. Gibt es in dieser Zeichnung eine Kante $e = (u, v)$, die keine Schleife ist, so können wir diese kontrahieren, indem wir v entlang e auf u schieben. Die zu v inzidenten Kanten zeichnen wir dabei entlang von e . So entsteht eine Zeichnung von $G_{/e}$, in der wieder jedes Paar von Kanten eine gerade Anzahl an Schnittpunkten hat. Seien $f, f' \in E$. Falls $f, f' \notin E(v)$, so ändert sich nichts an der Anzahl der Schnitte zwischen den beiden Kanten. Falls $f, f' \in E(v)$, so kommen pro Selbstkreuzung von e zwei Kreuzungen zwischen f und f' hinzu, insgesamt also eine gerade Anzahl. Außerdem kommt pro Kreuzung von e mit f und pro Kreuzung von e mit f' je eine Kreuzung hinzu. Das sind aber nach Voraussetzung beides gerade Zahlen. Ist $f \in E(v)$ und $f' \notin E(v)$, so kommt pro Kreuzung zwischen e und f' eine Kreuzung hinzu. Das ist nach Voraussetzung eine gerade Anzahl.

Da $G_{/e}$ einen Knoten und eine Kante weniger als G hat, wissen wir induktiv, dass eine planare Zeichnung von $G_{/e}$ mit dem selben Rotationssystem existiert. Mit einer solchen Zeichnung können wir aber die Kontraktion von e rückgängig machen ohne neue Kreuzungen zu produzieren, indem wir v nah bei u zeichnen und so eine planare Zeichnung von G erhalten.

Somit bleibt noch der Induktionsanfang zu zeigen, also der Fall, dass alle Kanten Schleifen sind. Wir wählen eine Schleife e , deren Enden in der Rotation möglichst nah beieinander liegen. Zwischen den Enden von e können keine zwei Enden einer weiteren Schleife liegen, da diese sonst näher beieinander liegen würden. Es kann

aber auch kein einzelnes Ende einer weiteren Schleife dazwischen liegen, da sie sonst eine ungerade Anzahl an Kreuzungen mit e hätte. Somit folgen die beiden Enden von e direkt aufeinander in der Rotation. Wenn wir e löschen erhalten wir induktiv eine planare Zeichnung mit dem selben Rotationsystem. Da die Enden von e direkt aufeinander folgen in der Rotation, können wir e wieder einfügen ohne Kreuzungen zu erzeugen. □

Satz HT.2 (Starker Satz von Hanani-Tutte)

Ein Graph G ist genau dann planar, wenn es eine Zeichnung von G gibt, sodass es zwischen jedem Paar von unabhängigen Kanten eine gerade Anzahl an Kreuzungen gibt.

Beweis. [Algebraischer Beweis]

Wir können beliebige zwei Zeichnungen eines Graphen durch die vier folgenden Operationen ineinander überführen:

1. Dreiecke flippen bzw. eine Kante über eine Kreuzung ziehen

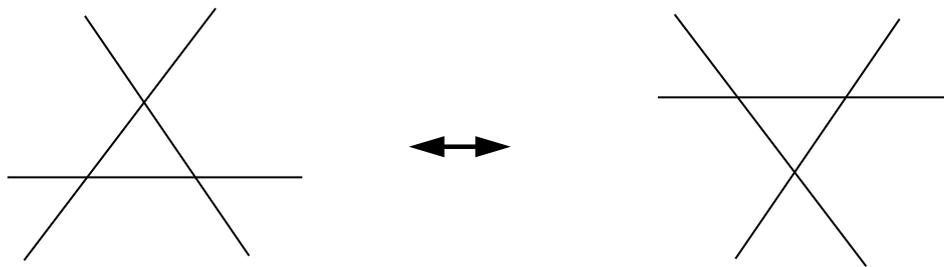


Abbildung 1: Operation 1: Flipping eines Dreiecks.

2. Leere Linsen und leere Schleifen auflösen oder hinzufügen



Abbildung 2: Operation 2: Auflösen einer leeren Linse. Zwischen den beiden Kanten befindet sich kein Knoten, auch die Schleife ist leer.

3. Lokale Änderung der Rotation eines Knotens
4. Einen Knoten über eine Kante schieben bzw. eine Kante über einen Knoten ziehen

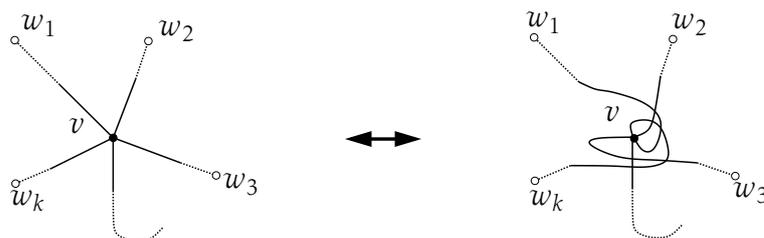


Abbildung 3: Operation 3: Änderung der Rotation eines Knotens. Die Änderung findet so nah am Knoten v statt, dass unabhängige Kanten nicht davon betroffen sind.

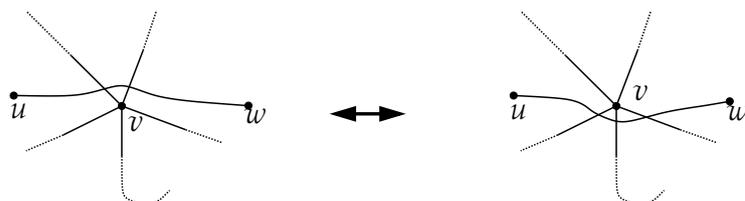


Abbildung 4: Operation 4: Die Kante uw wird über den Knoten v geschoben.

Seien D und D' zwei unterschiedliche Zeichnung von G . Wir können annehmen, dass sich die Knoten in beiden Zeichnungen in den selben Positionen befinden, da wir sonst einen Homöomorphismus der Ebene anwenden können, der sie in diese Lage überführt. Nun können wir die Operationen 1 bis 4 nutzen um die Kanten Schritt für Schritt in die gewünschte Position zu bringen: Durch Operation 1 können wir dabei die Kanten über Kreuzungen ziehen, durch eine Kombination der Operationen 2 und 3 über andere Kanten und durch Operation 4 über Knoten. Schließlich können wir durch Operation 2 leere Schleifen entfernen oder hinzufügen, falls dies erforderlich ist. Mit einer Zeichnung Θ des Graphen G assoziieren wir einen Vektor Z_Θ der für jedes Paar $\{e, e'\}$ eine Komponente besitzt. Der Wert der Komponente ist

$$Z_\Theta(\{e, e'\}) = \text{Parität von } \# \text{ Kreuzungen zwischen } e \text{ und } e'.$$

Wir können die Behauptung also umformulieren als

$$\exists \Theta : Z_\Theta = 0 \Rightarrow G \text{ ist planar.}$$

Wir betrachten nun $D_G = \{Z_\Theta : \Theta \text{ ist Zeichnung von } G\}$. Zunächst stellen wir fest, einzig Operation 4 den Vektor Z_Θ verändert. Wenn wir den Knoten v über die Kante $\{u, w\}$ schieben ändert sich die Parität der Kreuzungen aller Kanten in $E(v)$ mit $\{u, w\}$. Wir wissen also, dass

$$D_G \subseteq Z_{\Theta_0} + \langle x_{ev} : e \in E, v \in V, v \notin e \rangle,$$

wobei Θ_0 eine beliebige Zeichnung von G ist und

$$x_{ev}(\{e, e'\}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in e' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Vektor x_{ev} gibt also genau die Veränderung an, die das Schieben von v über die Kante e nach sich zieht.

Außerdem gilt auch $D_G \supseteq Z_{\Theta_0} + \langle x_{ev} : e \in E, v \in V \rangle$, denn ausgehend von der Zeichnung Θ_0 können wir die Kante e in einem dünnen Schlauch bis zum Knoten v umleiten, sie dann einmal um diesen Knoten führen und danach in dem Schlauch wieder bis zum Ausgangspunkt zurückführen. Durch diese Operation ändern sich genau die Paritäten der Schnitte von e mit den Kanten in $E(v)$. Jede Kante die vom Schlauch geschnitten wird, wird im Schlauch zweimal von e geschnitten, somit ändert sich die Parität nicht. Jede Kante in $E(v)$ wird einmal zusätzlich außerhalb des Schlauches von E geschnitten, also ändert sich die Parität. Somit ist $D_G = Z_{\Theta_0} + \langle x_{ev} : e \in E, v \in V \rangle$.

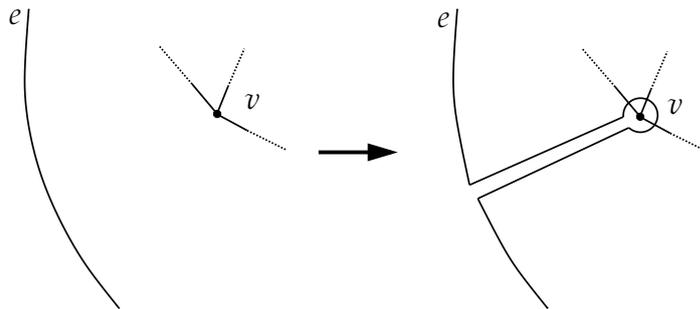


Abbildung 5: Umleiten der Kante e um den Knoten v .

Ist G planar, so ist $0 \in D_G$. Ist G nicht planar, so enthält es eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph (Satz von Kuratowski).

Behauptung. Es ist $0 \notin D_{K_5}$.

Beweis.

1. es gibt eine Zeichnung Θ von K_5 , sodass Z_{Θ} genau eine 1 enthält

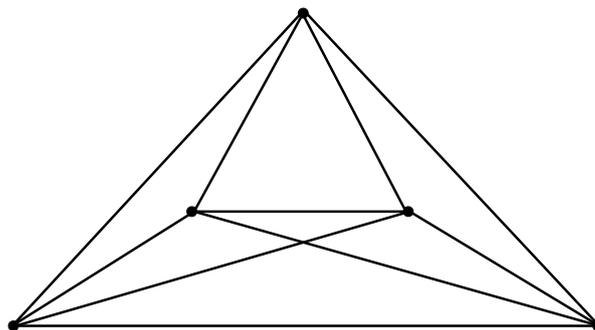


Abbildung 6: Eine Zeichnung Θ des K_5 für die Z_{Θ} genau eine 1 enthält. Es gibt nur ein Paar von Kanten, die sich kreuzen und diese Kanten sind unabhängig.

2. jedes x_{ev} enthält genau zwei 1en

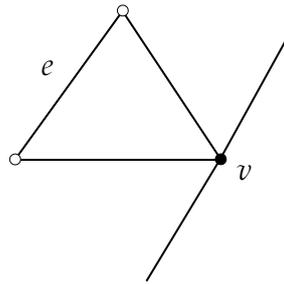


Abbildung 7: Da der K_5 kanten- und knotensymmetrisch ist, ergibt sich für jedes Paar (e, v) die gleiche Situation.

Behauptung. Es ist $0 \notin D_{K_{3,3}}$.

Beweis.

1. es gibt eine Zeichnung Θ von $K_{3,3}$, sodass Z_Θ genau eine 1 enthält

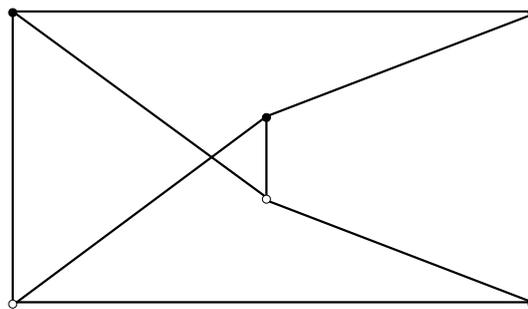


Abbildung 8: Eine Zeichnung Θ des $K_{3,3}$ für die Z_Θ genau eine 1 enthält. Es gibt nur ein Paar von Kanten, die sich kreuzen und diese Kanten sind unabhängig.

2. jedes x_{ev} enthält genau zwei 1en

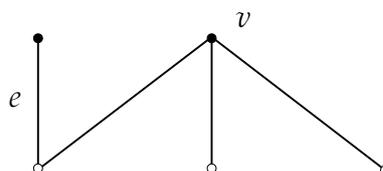


Abbildung 9: Da der $K_{3,3}$ kanten- und knotensymmetrisch ist, ergibt sich für jedes Paar (e, v) die gleiche Situation.

Bleibt also zu zeigen, dass dies bei einer Unterteilung des K_5 oder der $K_{3,3}$ so bleibt.

Falls eine Zeichnung Θ ein Paar von unabhängigen Kanten enthält, zwischen denen es eine ungerade Anzahl an Kreuzungen gibt und die Zeichnung Θ' entsteht durch Unterteilen der Kanten in Θ , dann gibt es in Θ' ebenfalls ein Paar von unabhängigen

Kanten mit einer ungeraden Anzahl an Schnittpunkten, denn es ist

$$Z_{\Theta}(\{e, e'\}) = \sum_{i=1}^k Z_{\Theta'}(\{e_i, e'\}),$$

falls e und e' unabhängig sind.

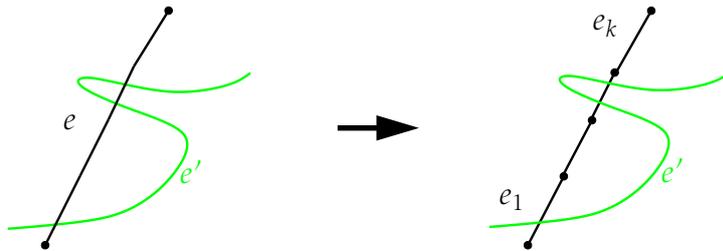


Abbildung 10: Unterteilung der Kante e in die Kanten e_1, \dots, e_k .

□

Bemerkung. Dieser Beweis impliziert einen polynomiellen Algorithmus zum Testen von Planarität: Zeichne G , berechne Z_{Θ} und löse $Ms = Z_{\Theta}$ über \mathbb{Z}_2 , wobei M die Matrix mit den x_{ev} als Spalten ist.

HT.2 Moon-Konstruktion

Satz HT.3 Es existiert eine Zeichnung Γ_n des K_n mit $cr(\Gamma_n) \leq \frac{3}{8} \binom{n}{4}$.

Beweis. Sei P eine Menge von n Punkten auf der Sphäre S_2 in allgemeiner Lage. Das heißt keine drei Punkte liegen auf einem gemeinsamen Großkreis und es gibt keine antipodalen Punkte in P . Wir bezeichnen mit \bar{P} die Menge der zu den Punkten in P antipodalen Punkte auf der Sphäre. Die Menge \hat{P} entsteht, indem für jedes Paar antipodaler Punkte (x, \bar{x}) mit $x \in P, \bar{x} \in \bar{P}$ einen der beiden Punkte zufällig auswählen. Dabei ist $\Pr(\hat{x} = x) = \Pr(\hat{x} = \bar{x}) = \frac{1}{2}$ und die Entscheidungen für verschiedene Punkte sind unabhängig. Nun zeichnen wir den K_n , indem wir zwei Punkte $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{P}$ durch den kürzeren Bogen auf ihrem gemeinsamen Großkreis verbinden.

Lemma HT.4 Für alle vierelementigen Teilmengen $A = \{w, x, y, z\} \subseteq P$ gilt

$$\Pr(\hat{A} \text{ induziert Kreuzung}) = \frac{3}{8}.$$

Wobei \hat{A} analog zu \hat{P} gebildet wird.

Beweis. Sei $\bar{A} = \{\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ die Menge der zu den Punkten in A antipodalen Punkte. Die Punkte in $A \cup \bar{A}$ spannen insgesamt 6 Großkreise auf. Als Graph interpretiert entspricht das einem Würfel bei dem auf jeder Seite beide Diagonalen eingezeichnet sind. Es entstehen also 6 Kreuzungen.

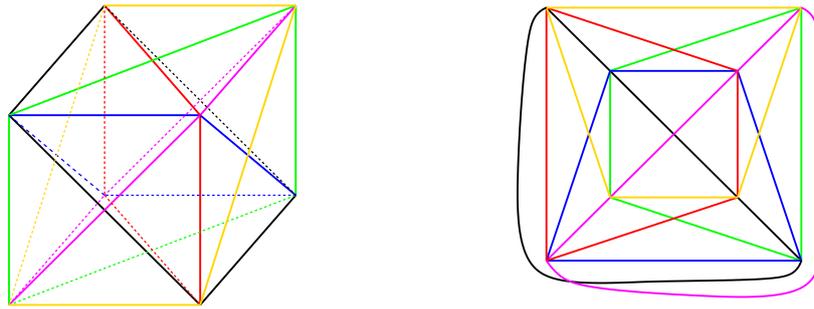


Abbildung 11: Der entstehende Graph, links als Würfel, und rechts mit nur 6 Kreuzungen gezeichnet. Die 6 Großkreise sind jeweils eingefärbt.

Damit eine dieser Kreuzungen tatsächlich von \hat{A} induziert wird müssen allerdings aller vier an der Kreuzung beteiligten Punkte ausgewählt werden.

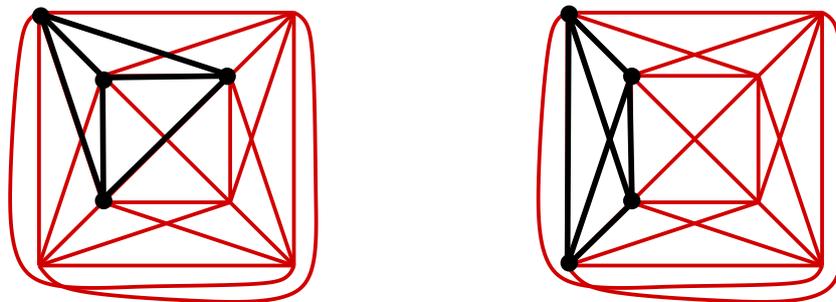


Abbildung 12: Im Wesentlichen gibt es 2 Fälle für die Auswahl von 4 Ecken, einmal ohne Kreuzung, einmal mit.

Das geschieht mit Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^4$. Insgesamt ist also $\Pr(\hat{A} \text{ induziert Kreuzung}) = 6 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{8}$. □

Sei X_A die Anzahl der von \hat{A} induzierten Kreuzungen. Damit gilt

$$\mathbf{E}(\# \text{ Kreuzungen}) = \mathbf{E}\left(\sum_{A \subseteq P} X_A\right) = \sum_{A \subseteq P} \mathbf{E}(X_A) = \sum_{A \subseteq P} \Pr(X_A = 1) = \frac{3}{8} \binom{n}{4}.$$

Da die erwartete Anzahl von Kreuzungen in einer solchen Zeichnung $\frac{3}{8} \binom{n}{4}$ ist, muss es auch eine Zeichnung mit höchstens so vielen Kreuzungen geben. □

Hamilton Kreise

Diese Vorlesung widmet sich ganz den Hamiltonkreisen. Dazu definieren wir zuerst den Hamilton Kreis und zeigen dann sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingungen für die Existenz eines solchen Kreises auf.

17.1 Hamilton Kreise

Definition 17.1 Sei G ein ungerichteter Graph. Ein Hamilton Kreis auf G ist ein Kreis, der jeden Knoten in G genau einmal besucht.

William Rowan Hamilton erfand 1857 das mathematische Spiel „*Icosian Game*“, in dem ein Spieler auf dem Netzgraphen des Dodekaeders ein Hamiltonkreis finden soll, für den ihm der Gegenspieler drei konsekutive Kanten vorgegeben hat.

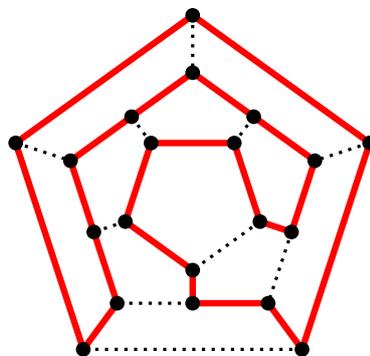


Abbildung 1: Ein Hamiltonkreis im Dodekaedergraphen.

Hinreichende Bedingungen

Im Folgenden sollen zwei hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Hamiltongraphen gegeben werden.

Satz 17.2 (Dirac 1952)

Jeder Graph G mit $n \geq 3$ Knoten und Minimalgrad $\delta_G \geq \frac{n}{2}$ ist hamiltonsch.

Beweis. Der Beweis lässt sich in drei Schritte unterteilen. Wir werden zuerst zeigen, dass G zusammenhängend ist. Anschliessend betrachten wir einen maximalen Pfad P

in G , von dem wir dann zeigen, dass es einen Kreis mit der gleichen Knotenmenge gibt. Zuletzt wird nachgewiesen, dass dieser Kreis ein Hamiltonkreis ist.

1. G ist zusammenhängend:

Für alle $x, y \in V_G$ gilt: $N[x] \cap N[y] \neq \emptyset$, da sowohl $|N[x]| \geq \frac{n}{2} + 1$ als auch $|N[y]| \geq \frac{n}{2} + 1$ und G lediglich n Knoten besitzt.

2. Sei $P = x_0 \dots x_k$ ein längster Pfad in G , dann gibt es auf $\{x_0 \dots x_k\}$ einen Kreis:

Gibt es die Kante $x_0 x_k \in E_G$, sind wir fertig. Andernfalls stellen wir fest, dass wegen der Maximalität von P sowohl die Nachbarschaft von x_0 als auch die von x_k ganz in $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ enthalten ist. Wir färben diese $k - 2$ Knoten nach folgendem Schema: Ein Knoten x_i wird *rot* gefärbt, wenn er Nachbar von x_k ist, und *blau*, wenn x_{i+1} ein Nachbar von x_0 ist. Von den $k - 2$ Knoten in $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ sind mindestens $\frac{n}{2}$ rot und $\frac{n}{2} - 1$ blau. Da $k \leq n - 1$, gibt es mindestens einen Knoten, der sowohl blau als auch rot gefärbt ist. Wenn x_i dieser Knoten ist, dann ist $(x_0, x_1, \dots, x_i, x_k, x_{k-1}, \dots, x_{i+1}, x_0)$ ein aufspannender Kreis, (vergl. Abb. 2).

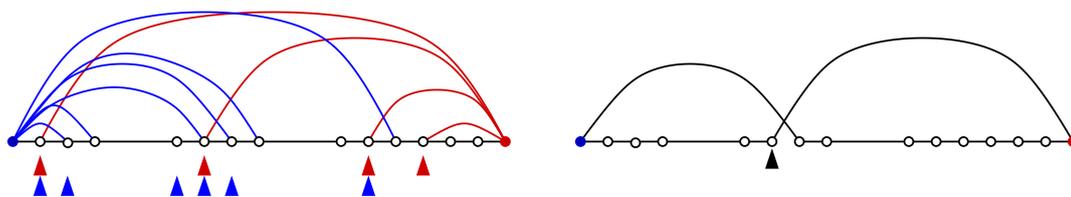


Abbildung 2: Zu den rot-blau gefärbten Pfadknoten (links) finden wir einen Kreis (rechts).

3. Der Kreis C auf $x_0 \dots x_k$ ist ein Hamiltonkreis:

Angenommen C ist kein Hamiltonkreis. Dann gibt es einen Knoten $y \in V_G \setminus C$. Da G zusammenhängend ist finden wir einen Pfad von y nach C . Sei y' der letzte Knoten $y' \notin C$ auf diesem Pfad. Wir können nun einen Pfad konstruieren, der in y' startet und länger ist als P . Das ist im Widerspruch zur Wahl von P als Pfad maximaler Länge. \square

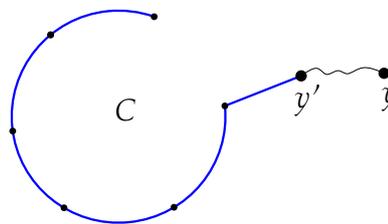


Abb. 3: Der Kreis enthält alle Knoten. Andernfalls kann P mit y' verlängert werden.

Bemerkung. Die in Satz 17.2 angegebene Schranke an den Minimalgrad für G ist eine bestmögliche. Ein einfaches Beispiel dafür erhält man aus der disjunkten Vereinigung zweier vollständiger Graphen mit k Knoten. Der Graph $G = K_k \dot{\cup} K_k$ hat einen Minimalgrad von $\delta = k - 1$ bei insgesamt $n = 2k$ Knoten und ist offensichtlich nicht hamiltonsch, da er nicht zusammenhängend ist.

Satz 17.3 (Erdős–Chvatal)

Sei G ein Graph mit mindestens 3 Knoten und $\alpha(G) \leq \kappa(G)$, so ist G hamiltonsch.

Beweis. Sei C ein längster Kreis. Dieser Kreis wird mindestens die Länge $|C| \geq \delta_G + 1$ haben, da wir ihn wie folgt konstruieren können: Starte in x_0 und erzeuge einen Pfad $x_0 \dots x_e$, der in x_e nicht mehr erweitert werden kann. Nun liegt die gesamte Nachbarschaft $N(x_e) \subseteq \{x_0, \dots, x_{e-1}\}$ im eben konstruierten Pfad und wir erhalten einen Kreis, der mindestens die Größe dieser Nachbarschaft hat, siehe Abb. 4. Damit gilt: $|C| \geq |N(x_e)| + 1 \geq \delta_G + 1 > \kappa(G)$.

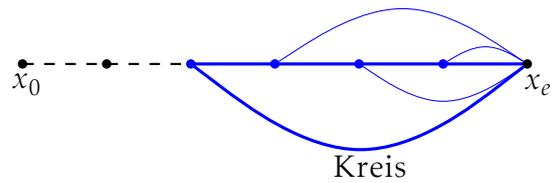


Abb. 4: Die Nachbarschaft von x_e auf dem Pfad (blau) erlaubt einen Kreis der Länge mindestens $|N(x_e)| + 1$ (blau und fett).

Ist C nicht hamiltonsch, so sei H eine Komponente von $G \setminus C$. Zwischen H und C gibt es mindestens $\kappa(G)$ viele Kanten mit paarweise verschiedenen Endpunkten auf C (Kontaktpunkte). Sei I die Menge all dieser H -Kontaktpunkte.

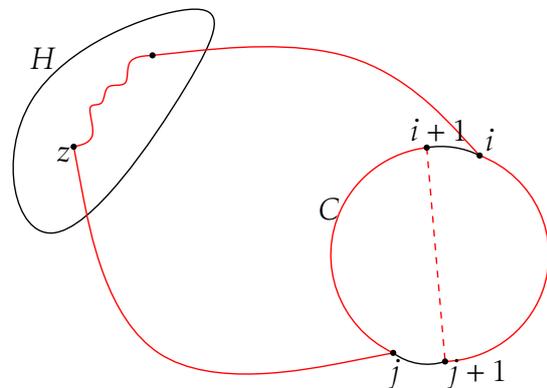


Abb. 5: Es kann keine Kante zwischen $i + 1$ und $j + 1$ geben, da wir sonst einen längeren Kreis als C konstruieren könnten.

I ist eine trennende Menge oder ganz C . In beiden Fällen gilt $|I| \geq \kappa(G)$. Für jedes Paar $i, j \in I$ kann keine Kante zwischen den Knoten $i + 1$ und $j + 1$ existieren, da andernfalls ein Kreis C' erzeugt werden kann, der länger wäre als C (siehe Abb. 5). Folglich ist die Menge $I^+ := \{i + 1 \in C : i \in I\}$ eine unabhängige Menge in G . Diese Eigenschaft wird nicht zerstört, wenn wir einen Knoten $z \in H$ hinzufügen (andernfalls hätten wir eine Kante $(i + 1, z)$ und C könnte mit einem Umweg über H zwischen i und $i + 1$ verlängert werden). Damit gilt $|I^+ \cup \{z\}| = |I^+| + 1 = |I| + 1 > \kappa(G)$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha(G) \leq \kappa(G)$. □

Notwendige Bedingung

Proposition 17.4 Sei G ein hamiltonscher Graph, so gilt für jede Teilmenge $S \subseteq V_G$:
 $\#(\text{Komponenten von } G \setminus S) \leq |S|$

Beweis. Durchlaufe den Hamiltonkreis mit festem Start und fester Richtung. Jede Komponente von $G \setminus S$ hat einen eindeutigen ersten Vorgänger in S . Jeder Knoten in S kann aber nur Vorgänger einer Komponente sein. □

Hamiltonscher Abschluss und Färbungen

Nachdem in der letzten Vorlesung der Hamilton Kreis eingeführt wurde, soll dieses Thema nun mit dem Hamiltonschen Abschluss zu Ende gebracht werden. Anschließend wird die Färbung von Graphen betrachtet. Dabei geben wir obere wie untere Schranken an die Färbingszahl $\chi(G)$ und benutzen bei den Beweisen sowohl das Konzept des Zufallsgraphen als auch einen Greedy-Algorithmus zur Färbung von Knoten.

18.1 Hamiltonscher Abschluss

Lemma 18.1 Sei G ein Graph und $u, v \in V_G$ mit $\{u, v\} \notin E_G$ zwei nicht adjazente Knoten mit summiertem Grad $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Dann gilt:

$$G \text{ ist hamiltonsch} \iff G + (u, v) \text{ ist hamiltonsch}$$

Beweis. Die Implikation „ \Rightarrow “ ist trivial^{IX}. Der Beweis von „ \Leftarrow “ ist sehr ähnlich zum Beweis von Satz 17.2. Sei C ein Hamiltonkreis in $G + (u, v)$, der relevante Fall ist wenn (u, v) in C vorkommt. Ohne diese Kante liefert C einen Pfad (x_1, x_2, \dots, x_n) mit $x_1 = u$ und $x_n = v$. Über die Nachbarschaften von u und v bekommt man wie in Beweis von Satz 17.2 eine rot-blau Färbung der Knoten. Die Gradbedingung garantiert einen doppelt gefärbten Knoten der wie in Abb. 2 zur Konstruktion eines Kreises auf der Knotenmenge genutzt werden kann. \square

Definition 18.2 Der Hamiltonsche Abschluss (H -Abschluss) eines Graphen G ist der Graph, den man erhält, wenn man solange Kanten gemäß Lemma 18.1 hinzufügt, wie es geht.

D.h. im H -Abschluss G^+ von G gilt: $\deg_{G^+}(u) + \deg_{G^+}(v) \geq n \implies (u, v) \in E_{G^+}$.

Bemerkung. Der Hamiltonsche Abschluss ist wohldefiniert, d.h. jede zwei maximale Sequenzen von Erweiterungen gemäß Lemma 18.1 enden im selben Graphen.

Satz 18.3 (Chvátal)

Sei G ein Graph mit der Gradfolge $d_1 \leq \dots \leq d_k$. Wenn für alle $i < \frac{n}{2}$ gilt $d_i > i$ oder $d_{n-i} \geq n - i$, so ist G hamiltonsch.

^{IX}Das Wörtchen wird ja oft leichtfertig benutzt, aber hier darf man es sagen.

Beweisidee. Die Idee^X des Beweises liegt darin, zu zeigen dass der Hamiltonsche Abschluss G^+ von G der Vollständige Graph K_n ist. Da K_n hamiltonsch ist, muss dann auch schon G hamiltonsch gewesen sein (Lemma 18.1).

Wenn $G^+ \neq K_n$ so gibt es zwei nicht adjazente Knoten $u, v \in V_G$ mit $(u, v) \notin E^+$, sodass $\deg(u) + \deg(v)$ maximal ist. Nun gilt $\deg(u) + \deg(v) < n$ und mit $\deg(u) \leq \deg(v)$ auch $\deg(u) < \frac{n}{2}$. Sei $\deg(u) = i$.

Die Wahl von (u, v) impliziert, dass für alle w mit $\deg(u) < \deg(w)$ die Kante (w, v) im Abschluss ist. Zusammen mit $\deg(v) < n - i$ kann daraus $d_i \leq i$ gefolgert werden.

Die Wahl von (u, v) impliziert auch, dass für alle w mit $\deg(v) < \deg(w)$ die Kante (u, w) im Abschluss ist. Zusammen mit $\deg(u) = i$ lernen wir daraus, dass $\deg_G(v) = d_j$ mit $j \geq n - i$. Das bedeutet aber, dass $d_{n-i} < n - i$.

Aus der Annahme, dass der Abschluss nicht der K_n ist haben wir also einen Widerspruch zu den Prämissen des Satzes hergeleitet. \square

18.2 Färbungen

Definition 18.4 Die chromatische Zahl (Färbungszahl) $\chi(G)$ eines Graphen G ist das kleinste k , sodass eine Abbildung $c : V \rightarrow [k]$ existiert mit $c(u) \neq c(v) \forall (u, v) \in E$.

Bemerkung. Die Färbungszahl kann auch anders definiert werden. Hier zwei alternative Möglichkeiten:

- $\chi(G)$ ist das kleinste k , sodass V eine Partition $I_1 \dots I_k$ in unabhängige Menge besitzt ($I_j = c^{-1}(j)$).
- $\chi(G)$ ist das kleinste k , sodass ein Homomorphismus von G in den K_k existiert.

Einige einfache aber wichtige Tatsachen:

- $\chi(K_n) = n$ und $\chi(C_{2k}) = 2$ und $\chi(C_{2k+1}) = 3$.
- $\chi(H) \leq \chi(G)$ wenn H ein Untergraph von G ist.

Untere Schranken

Sei $I_1 \dots I_k$ eine Partition von V in unabhängige Mengen. Da eine unabhängige Menge I und eine Clique C höchstens einen gemeinsamen Knoten besitzen können muss $k \geq |C|$ gelten. Wendet man dieses Argument auf eine minimale Partition und eine maximale Clique an erhält man:

$$\chi(G) \geq \omega(G) \tag{18.3}$$

Aus $\sum |I_i| = |V| = n$ und $|I_i| \leq \alpha(G)$ folgt eine weitere Schranke:

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \tag{18.4}$$

^XDie fehlenden Details zum Beweis kann man im Buch von West *Introduction to Graph Theory* finden.

Anhand einiger Beispiele wollen wir nun zeigen, dass diese beiden Schranken schlecht sein können, d.h. es lassen sich Graphen bei denen die chromatische Zahl deutlich über diesen Schranken liegt.

Beispiel, in dem die Schranke (18.4) schlecht ist: Wir konstruieren den Graphen als disjunkte Vereinigung einer k -Clique und einer unabhängigen Menge mit k Knoten, d.h. $G = K_k \dot{\cup} \overline{K}_k$. Nun gilt für die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G) = k + 1 \approx \frac{n}{2}$. Damit ist $\frac{n}{\alpha} \approx 2$ auf einen festen Wert begrenzt, wohingegen die chromatische Zahl $\chi(G) = k = \frac{n}{2}$ beliebig groß werden kann.

Dreiecksfreie Graphen mit großer chromatischer Zahl: Wir beschreiben eine Konstruktion von Mycielski bei der aus einem gegebenen Graphen G ein Graph G^+ konstruiert wird, sodass die Cliquenzahl gleich bleibt ($\omega(G) = \omega(G^+)$) und die chromatische Zahl um eins wächst ($\chi(G^+) = \chi(G) + 1$). Der Graph G^+ wird auf folgende Weise konstruiert: Die Knotenmenge V^+ besteht aus zwei Kopien V' und V'' von V und einem zusätzlichen Knoten x , also $V^+ = V' \cup V'' \cup x$. Auf V' haben wir in G^+ eine Kopie von G , als Formel $G^+[V'] = G$. Zusätzlich haben wir zu jeder Kante $(u, v) \in E$ die Kante (u', v'') und dann noch alle Kanten (v'', x) in E^+ .

$$E^+ = \{(u', v') | (u, v) \in E\} \cup \{(u', v'') | (u, v) \in E\} \cup \{(v'', x) | v \in V\}.$$

Da V'' eine unabhängige Menge in G^+ ist kann eine maximale Clique in G^+ maximal einen Knoten aus V'' enthalten. Da es keine Kanten zwischen x und V' gibt ist x nur in Cliques der Größe ≤ 2 . Wenn $Y' \cup \{v''\}$ eine Clique ist, dann ist aber auch $Y' \cup \{v'\}$ eine Clique. Also finden wir eine maximale Clique von G^+ die ganz in V' enthalten ist und $\omega(G^+) = \omega(G^+[V']) = \omega(G)$.

Als nächstes zeigen wir $\chi(G^+) \neq \chi(G)$. Angenommen die chromatische Zahl wäre gleich. Wir betrachten eine Färbung c von G^+ mit $\chi(G)$ Farben. Alle Farben werden in $G^+[V']$ benutzt. Für jede Farbe i gibt es sogar einen Knoten v'_i , in dessen V' -Nachbarschaft alle Farben außer i vertreten sind. Andernfalls könnten wir die Farbe i in der zugehörigen G Färbung bei jedem Knoten durch eine nicht vertretene Farbe ersetzen und so G mit weniger als $\chi(G)$ Farben färben.

Da v''_i in V' die gleiche Nachbarschaft wie v'_i besitzt bleibt auch für v''_i nur i als mögliche Farbe. Für x muss nun eine neue Farbe benutzt werden.

Wir können G^+ leicht mit $\chi(G) + 1$ Farben färben: Dazu kopieren wir eine Färbung von G auf $G^+[V']$, für V'' verwenden wir eine zusätzliche Farbe und für x eine beliebige Farbe aus der Färbung von G . □

Die Konstruktion liefert ausgehend von K_2 einen Graphen G_k mit $\omega(G_k) = 2$ und $\chi(G_k) = k$ auf $2^{k-1} + 2^{k-2} - 1$ Knoten, siehe Abb 1. Damit haben wir für beide Schranken 18.3 und 18.4 Beispiele konstruiert, für die die entsprechende Schranke beliebig schlecht ist.

Zufallsgraphen

Eine weitere Möglichkeit, die Schranken für die chromatische Zahl zu vergleichen, bieten Zufallsgraphen. Im einfachsten Modell ist ein Zufallsgraph auf der Knotenmen-

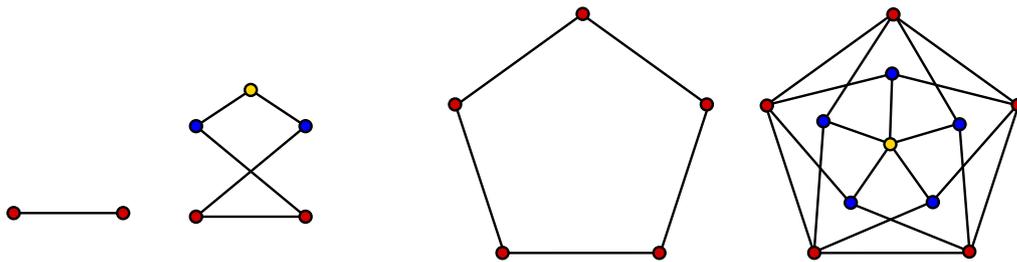


Abbildung 1: Zwei Beispiele zur Mycielski Konstruktion, von der Kante K_2 zum C_5 und von C_5 zum Grötzsch Graphen. Die Knotenmengen V und V' sind jeweils rot, V'' blau und x gelb.

ge V ein Graph in dem jede mögliche Kante unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ enthalten ist. Man kann sich vorstellen, dass für jede Kante des K_V eine Münze geworfen wurde um zu entscheiden, ob sie zu G gehört oder nicht. Auf Zufallsgraphen werden Parameter ω, α, χ , etc. zu Zufallsvariablen. Neben dem Erwartungswert kann man auch die Wahrscheinlichkeiten betrachten mit denen, die Werte der ZV über oder unter gewissen Schranken liegen.

Wir betrachten zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass $\omega \geq k$ ist.

$$\begin{aligned} \Pr(\omega \geq k) &= \Pr\left(\bigcup_{A \in \binom{[n]}{k}} (A \text{ ind. Clique})\right) \leq \sum_{A \in \binom{[n]}{k}} \Pr(A \text{ ind. Clique}) \\ &= \sum_{A \in \binom{[n]}{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \leq n^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-k \log n + \frac{k(k-1)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}(k-1-2 \log n)} \end{aligned}$$

Für wachsendes n und $k = k(n) > (2 + \epsilon) \log n$ geht $\Pr(\omega \geq k)$ gegen Null. Also haben Zufallsgraphen (mit großer Wahrscheinlichkeit) keine Cliques mit $(2 + \epsilon) \log n$ Knoten. Tatsächlich ist der Wert der Zufallsvariable ω für Zufallsgraphen stark konzentriert um den Wert $2 \log n$. das Komplement eines Zufallsgraphen ist ein Zufallsgraph daher sind α und ω identisch verteilt. Wir sehen also, dass von den beiden Schranken 18.3 und 18.4 an χ nur die Zweite einen brauchbaren Wert liefert. Tatsächlich liefert diese Schranke den richtigen Wert für χ , das zeigt der folgende Satz:

Satz 18.5 (Bollobas '88) Für Zufallsgraphen gilt: $\chi \sim \frac{n}{2 \log n}$.

Obere Schranken

Nachdem wir zwei untere Schranken betrachtet haben, wollen wir in diesem Abschnitt Graphen färben und aus der Analyse der Färbungsstrategie eine einfache obere Schranke extrahieren.

Proposition 18.6 Für die chromatische Zahl von G gilt: $\chi(G) \leq \Delta_G + 1$.

```
Greedy( $G, \pi$ )  
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
     $\text{col}(v_{\pi(i)}) \leftarrow \min(c : c \neq \text{col}(v_{\pi(j)}) \text{ für alle } j < i)$   
  return col
```

Beweis. Der Beweis stützt sich auf den Greedy-Algorithmus zur Knotenfärbung von Graphen. Dabei wird eine Totalordnung auf der Farbmenge vorausgesetzt, meistens nimmt man einfach an, dass mit natürlichen Zahlen gefärbt wird. Der Algorithmus betrachtet die Knoten in einer festgelegten Reihenfolge. Dem aktuell betrachteten Knoten wird jeweils die kleinste zulässige Farbe zugewiesen. Unzulässig ist eine Farbe für v wenn sie schon für einen Nachbarn von v verwendet wurde. Also wird v eine Farbe $\leq \deg(v) + 1$ zugewiesen und die maximale verwendete Farbe ist $\leq \Delta_G + 1$. \square

Bemerkung.

- Es gibt einen Baum T_k mit $\Delta_{T_k} = k$ und 2^k Knoten für den es eine Knotenreihenfolge $\pi \in S_{V_k}$ gibt, so dass **Greedy**(T_k, π) genau $k + 1$ Farben verwendet. Da Bäume zweifärbbar sind, heißt das, dass die Lücke zwischen $\chi(G)$ und der von einer Greedy-Färbung von G verwendeten Anzahl von Farben kann beliebig groß sein.

Färbungen und Orientierungen

In der letzten Vorlesung haben wir uns mit Knotenfärbungen eines Graphen beschäftigt. Die Knotenfärbungszahl χ ist die kleinste Zahl, sodass der Graph in χ unabhängige Mengen partitioniert werden kann. Die Klassen der Partition sind die Farbklassen. Wir haben den Greedy-Färbungs-Algorithmus kennengelernt und gesehen, dass die Anzahl der von Greedy benötigten Farben von der Knoten-Reihenfolge π abhängt. In dieser Vorlesung werden wir versuchen, möglichst gute Knoten-Reihenfolgen für den Greedy-Algorithmus zu finden, aber auch Orientierungen von Graphen und ihren Zusammenhang zu Färbungen untersuchen.

19.1 Greedy-Färbungen und k -Degeneriertheit

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und π eine Permutation von V .

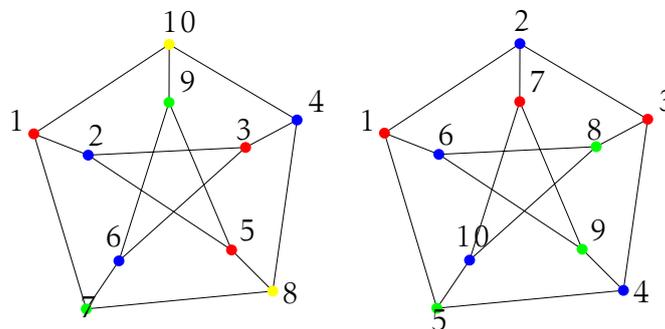


Abbildung 1: Zwei unterschiedliche Reihenfolgen führen auf dem gleichen Graphen zu verschiedenen Färbungen. Im Beispiel benötigen die beiden Färbungen sogar verschieden viel Farben .

Beobachtung. Wenn die Knotenreihenfolge $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ geschickt gewählt ist, dann benötigt der Greedy-Algorithmus nur $\chi(G)$ Farben.

Beweis. Sei I_1, \dots, I_k eine optimale Partition der Knotenmenge V in unabhängige Mengen. Optimal heißt hier, dass $k = \chi(G)$. Sei nun π gerade so gewählt, dass für $i < j$ immer gilt, wenn $x \in I_i$ und $y \in I_j$, dann kommt x vor y in π . Lassen wir nun den Greedy-Algorithmus in der durch π gegebenen Knotenreihenfolge arbeiten, so gilt, dass alle x aus I_j eine Farbe, die kleiner oder gleich j ist, bekommen. Insgesamt werden also höchstens k Farben benötigt. \square

Der Greedy-Algorithmus ist im Allgemeinen nicht optimal. Wir wollen uns nun anschauen, wie wir „gute“ Knoten-Reihenfolgen für Greedy finden können. Als Beispiel betrachten wir einen Baum G mit n Knoten. Die Permutation $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ ist „gut“ für den Baum, wenn alle Knoten i höchstens einen Nachbarn in der Menge $\{\pi_1, \dots, \pi_{i-1}\}$ haben. In diesem Fall benötigt der Greedy-Algorithmus nur zwei Farben, um G zu färben. Eine gute Ordnung (π_1, \dots, π_n) kann von hinten aufgebaut werden, indem immer Knoten vom Grad eins, also Blätter, gewählt werden. In Abbildung 2 ist dieser Vorgang exemplarisch an einem Baum dargestellt.

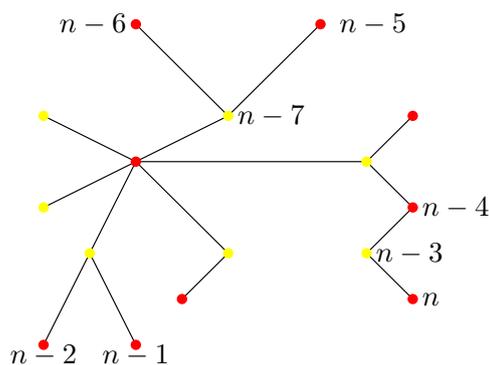


Abb. 2: 2-Färbung eines Baums mit teilweiser rückwärts aufgebauter Ordnung

Definition 19.1 Ein Graph $G = (V, E)$ heißt k -degeneriert wenn eine Permutation $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ von V gibt, so dass jeder Knoten π_i höchstens k Nachbarn in $\{\pi_1, \dots, \pi_{i-1}\}$ hat.

Beobachtung. Bäume sind 1-degeneriert.

Proposition 19.2 Ein k -degenerierter Graph G hat Färbungszahl $\chi(G) \leq k + 1$.

Beweis. Die Greedy-Färbung mit einer Knoten-Reihenfolge π die die k -Degeneriertheit belegt verwendet höchstens $k + 1$ Farben. □

Proposition 19.3 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt

$$\chi(G) \leq 1 + \max(\delta_H : H \text{ induzierter Subgraph von } G)$$

wobei δ_H der Minimalgrad von H ist.

Beweis. Wir konstruieren eine Permutation $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ von hinten nach vorne. Sei dazu π_n ein Knoten vom Grad δ_G . Diesen entfernen wir aus G , dies ergibt einen induzierten Subgraphen. Allgemein wählen wir π_i als Knoten vom Grad δ_{H_i} wobei $H_i = G[V \setminus \{\pi_{i+1}, \dots, \pi_n\}]$. So erhalten wir eine Permutation π . Nach Konstruktion hat der Knoten π_i höchstens $\max \delta_H$ Nachbarn in $\{\pi_1, \dots, \pi_{i-1}\}$ hat. Also benötigt der Greedy-Algorithmus für (G, π) höchstens $\max \delta_H + 1$ Farben. □

Bemerkung. Tatsächlich gilt G ist k -degeneriert \iff

$$k \leq \max(\delta_H : H \text{ induzierter Subgraph von } G).$$

19.2 Färbungen und Orientierungen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und π eine Permutation von V . Dann induziert π eine Orientierung \vec{G}_π , indem alle Kanten x, y aus E so orientiert werden, dass der Startknoten gerade der ist, der in π zuerst vorkommt. Anders gesagt wenn $\pi = \dots x \dots y \dots$, dann wird die Kante von x nach y orientiert. Mit dieser Orientierung gilt, dass der Eingangsgrad eines Knotens v aus V gerade der Anzahl seiner in π links von ihm stehenden Nachbarn entspricht. Da der Greedy-Algorithmus mit der durch π gegebenen Reihenfolge dem Knoten y eine Farbe $\text{col}(y) \leq \text{indeg}(y) + 1$ zuweist gilt also

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{y \in V} \text{indeg}(y).$$

Außerdem gilt: Ist \vec{G} eine azyklischen Orientierung von G und π eine topologische Sortierung von \vec{G} , so ist die durch π induzierte Orientierung \vec{G}_π von G gerade \vec{G} , als Formel $\vec{G} = \vec{G}_\pi$.

Sei \vec{G} eine azyklische Orientierung von $G = (V, E)$. Der transitive Abschluss von \vec{G} ist eine partielle Ordnung $P_{\vec{G}}$. Die kanonische Antikettenzerlegung einer Ordnung P bekommt man mit den folgenden iterativen Verfahren: Die erste Antikette A_1 ist die Menge der Minima von P (das sind die Quellen, d.h. Knoten ohne eingehende Kanten). Allgemein ist A_i die Menge der Minima von P ohne die Knoten, die bereits in Antiketten sind, also $A_i = \text{Min}(P \setminus \cup_{j < i} A_j)$. So wird weiter verfahren, bis alle Knoten in Antiketten enthalten sind. Die Anzahl der Antiketten in der kanonischen Antikettenzerlegung von $P_{\vec{G}}$ ist die Höhe $h(P_{\vec{G}})$, das ist die maximale Anzahl Elemente einer Kette. Jede Antikette A_i ist eine unabhängige Menge sowohl in $P_{\vec{G}}$ nach Konstruktion, als auch in \vec{G} , da dort nur höchstens weniger Kanten enthalten sind und damit auch in G . Die Antikettenzerlegung liefert also eine Färbung von G mit $h(P_{\vec{G}})$ Farben.

Beispiel. Sei $G = C_5$ und \vec{G} und $P_{\vec{G}}$ wie in Abb. 3. Die Höhe von $P_{\vec{G}}$ ist also 5 und wir bekommen eine 5-Färbung von C_5 . Betrachten wir als weiteres Beispiel $G = C_6$ mit der Orientierung \vec{G} aus Abb. 4. Die Ordnung kann in zwei Antiketten zerlegt werden. Die so gefundene gefundene Schranke an die Färbungszahl ist also bestmöglich. Degeneriertheit dagegen liefert uns bei diesem Beispiel nur, dass $\chi(G)$ höchstens drei ist.

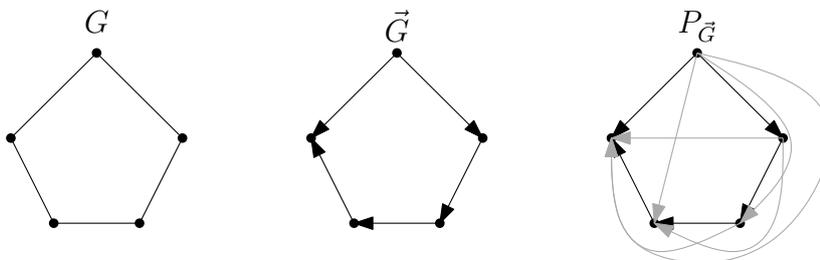


Abbildung 3: Eine azyklische Orientierung \vec{C}_5 und ihr transitiver Abschluss.

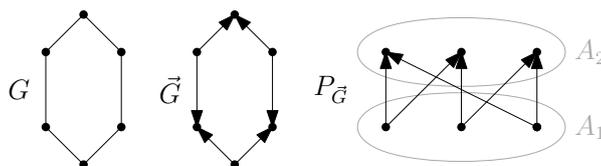


Abbildung 4: Die alternierende Orientierung von C_6 liefert eine optimale Färbung.

Satz 19.4 Sei $G = (V, E)$ ein Graph, \vec{G} eine Orientierung von G und $\ell(\vec{G})$ die Länge bzgl. Anzahl Kanten eines längsten gerichteten Pfades in \vec{G} . Dann gilt $\chi(G) \leq \ell(\vec{G}) + 1$.

Beweis. Sei $D = (V, \vec{F})$ ein azyklischer Teilgraph von $\vec{G}(V, \vec{E})$ mit maximaler Kantenzahl. Sei P_D der transitive Abschluss von D . Es gilt $h(P_D) \leq \ell(\vec{G}) + 1$. Der Satz folgt nun unmittelbar aus der folgenden Behauptung:

Behauptung. Die kanonische Antikettenzerlegung von P_D liefert eine legale Färbung von G mit $h(P_D)$ Farben.

Zum Beweis der Behauptung betrachten wir zwei Fälle:

- $(x, y) \in \vec{F}$. Dann haben x und y verschiedene Farben, da sie in verschiedenen Antiketten sind.
- $(x, y) \notin \vec{F}$. Dann gibt es in \vec{F} einen gerichteten y - x -Pfad. Aus der Maximalität von D folgt, dass $D + (x, y)$ nicht azyklisch ist. Da aber P_D der transitive Abschluss von D ist, gilt dann $y < x$ in P_D , also sind x und y in verschiedenen Antiketten, also auch unterschiedlich gefärbt. \square

19.3 Der Satz von Brooks

Wir haben bereits gesehen, dass der Maximalgrad $+1$ eine Schranke an die Färbungszahl liefert. Diese Schranke ist für ungerade Kreise und vollständige Graphen bestmöglich. Für alle anderen zusammenhängenden Graphen gilt $\chi \leq \Delta_G$.

Satz 19.5 (Brooks)

Ungerade Kreise C_{2k+1} und vollständige Graphen K_n sind die einzigen zusammenhängenden Graphen mit $\chi = \Delta_G + 1$.

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$, der weder ein ungerader Kreis, noch der vollständige Graph K_n ist. Wir werden versuchen, eine Permutation π so festzulegen, dass der Greedy-Algorithmus zur Färbung von G höchstens Δ Farben benötigt.

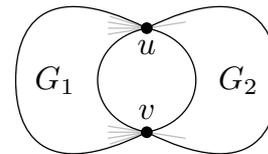
(Fall 1) Zunächst betrachten wir den Fall in dem es einen Knoten v mit $\deg(v) < \Delta$ gibt. Für einen aufspannenden Baum T von G sei \vec{T} die Orientierung als in-Arboreszenz mit Wurzel (Senke) v . Da \vec{T} azyklisch ist gibt es eine topologische Sortierung π von \vec{T} . Dann ist $v = \pi_n$ und für alle $i \neq n$ gilt, dass π_i in \vec{T} eine Kante nach rechts

hat. Daher gilt wenn col die Greedy Färbung bezeichnet: $\text{col}(v) \leq \text{deg}(v) + 1 \leq \Delta$ und $\text{col}(u) \leq (\text{deg}(u) - 1) + 1 \leq \Delta$ für alle $u \neq v$. Von nun an sei G ein Δ -regulärer Graph.

(Fall 2) Sei nun $\Delta \leq 2$. Für $\Delta = 0$ ist G der K_1 , für $\Delta = 1$ ist G der K_2 und für $\Delta = 2$ ist G ein Kreis. Wie wir wissen, lassen sich gerade Kreise mit zwei Farben färben. Von nun an sei $\Delta \geq 3$.

(Fall 3) Sei zunächst $\kappa(G) \leq 2$, d.h. es gibt einen trennenden Knoten v oder ein trennendes Knotenpaar $\{u, v\}$. Wir betrachten den zweiten Fall. An $\{u, v\}$ kann G in zwei Graphen G_1 und G_2 aufgespalten werden, die beide u und v enthalten. Die Graphen G_i sind nicht Δ -regulär. Daher finden wir mithilfe von Fall 1 eine Färbung von G_1 und G_2 mit Δ Farben. Wenn u und v in beiden Färbungen die gleiche oder in beiden Färbungen verschiedene Farben haben, dann können wir durch Farbpermutation in G_2 eine Δ -Färbung von G finden. Falls $(u, v) \in E$ wären die Farben von u und v in beiden Färbungen verschieden. Daher nehmen wir an, dass $(u, v) \notin E$ und dass in jeder Δ -Färbung die Knoten u und v in G_1 gleich und in G_2 verschieden gefärbt sind. Wir zeigen nun, dass dies nicht wahr ist. Wenn u in G_1 weniger als $\Delta - 1$ Nachbarn hat, gibt es für die Farbwahl von u einen Freiheitsgrad und wir können u umfärben wodurch wir eine Δ -Färbung von G_1 erhalten, in der die beiden Knoten verschieden gefärbt sind. Analoges gilt für v .

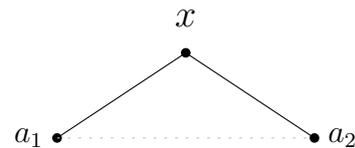
Wir nehmen nun an, dass u und v mindestens Grad $\Delta - 1$ in G_1 haben. Es folgt, dass die beiden Knoten in G_2 höchstens Grad 1 haben. In der Färbung von G_2 besitzt die vereinte Nachbarschaft von u und v also maximal zwei Farben; daher können u und v mit einer verbleibenden dritten Farbe gefärbt werden. Wir erhalten so eine Färbung von G_2 , in der u und v die gleiche Farbe haben. Durch Permutation der Farben von G_2 erhalten wir eine Δ -Färbung von G . Von nun an sei $\kappa(G) \geq 3$.



(Fall 4)

Behauptung. Es existieren drei Knoten x, a_1 und a_2 mit $(x, a_1), (x, a_2) \in E$ und $(a_1, a_2) \notin E$, so dass G ohne $\{a_1, a_2\}$ zusammenhängend ist.

Beweisidee: Da G nicht vollständig ist existiert ein Paar $(b_1, b_2) \notin E$. Auf einem kürzesten b_1 - b_2 Weg in G bilden je drei aufeinanderfolgende Knoten ein geeignetes Tripel (a_1, x, a_2) .



Da $G \setminus \{a_1, a_2\}$ zusammenhängend ist, besitzt dieser Graph einen aufspannenden Baum T . Wir orientieren T als in-Arboreszenz mit Wurzel x . Sei π' eine topologische Sortierung von \vec{T} . Wir wählen π als $\pi = a_1 a_2 \pi'$. Aufgrund der Orientierung von T ist also x das letzte Element in π . Wenn col die Greedy-Färbung bezüglich π bezeichnet, dann gilt: $\text{col}(a_1) = \text{col}(a_2) = 1$ sowie $\text{col}(u) \leq (\text{deg}(u) - 1) + 1 = \Delta$ für alle $u \in V(T) \setminus x$. Da zwei der Nachbarn von x dieselbe Farbe haben gilt auch $\text{col}(x) \leq (\text{deg}(x) - 1) + 1 = \Delta$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Schranken und Kantenfärbungen

Nachdem wir uns in der letzten Vorlesung mit Färbungen und Orientierungen beschäftigt haben, wollen wir uns nun die Frage stellen, welche Eigenschaft eines Graphen große Färbungszahlen erzwingt. Natürlich erzwingen große Cliques große Färbungszahlen, diese sind aber nicht notwendig.

Im weiteren Verlauf werden wir uns mit Kantenfärbungen und Kantengraphen beschäftigen.

20.1 Minoren und Unterteilungen

Definition 20.1 H ist ein Minor von $G = (V, E)$, wenn H durch eine Folge der Operationen Kantenkontraktion, Kantenlöschung und Knotenlöschung aus G erzeugt werden kann.

Eine Kantenkontraktion kann Mehrfachkanten und Schleifen erzeugen. Diese werden typischerweise „wegreduziert“. In Abb. 1 ist eine Kantenkontraktion beispielhaft dargestellt.

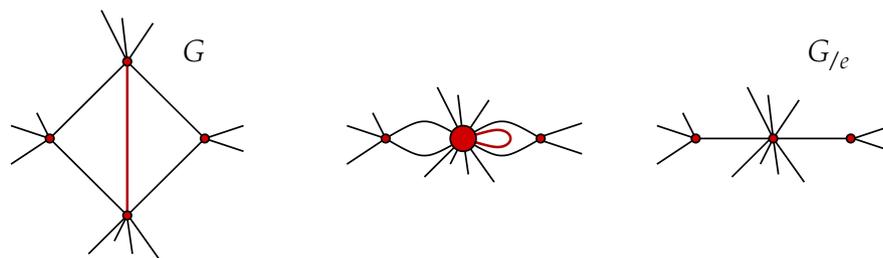


Abbildung 1: Ein Ausschnitt aus G mit einer roten Kante e ; die unreduzierte Kontraktion und G/e der durch Kontraktion von e erzeugte Graph.

Definition 20.2 Eine Unterteilung einer Kante (x, y) ist ein Pfad dessen Endpunkte x und y sind. K ist eine Unterteilung von G , wenn K aus G entsteht indem einige Kanten unterteilt werden, d.h. die Kanten werden durch je eine Unterteilung (Pfade) ersetzt. Formaler kann man die einfache Unterteilung der Kante, also die Ersetzung durch einen Pfad der Länge zwei, und dadurch auch die Menge $U(G)$ der Unterteilungen

des Graphen G wie folgt definieren:

$$U((V, E), (x, y)) = (V + v, E + (x, v) + (v, y) - (x, y)), v \notin V \tag{20.5}$$

$$U(G) = \{K \mid \exists k, G_0 = G, G_1, \dots, G_k = K : \forall i \exists e \in E(G_i) : G_{i+1} = U(G_i, e)\} \tag{20.6}$$



Bemerkung. Wenn K eine Unterteilung von G ist, dann ist G ein Minor von K .

(Hadwiger-Vermutung) Wenn $\chi(G) \geq k$, so besitzt G einen K_k -Minor.

(Hajos-Vermutung) Wenn $\chi(G) \geq k$, so besitzt G eine K_k -Unterteilung als Subgraph.

Beobachtung. Mit der obigen Bemerkung ist klar, dass die Hajos-Vermutung stärker ist als die Hadwiger-Vermutung (Hajos \implies Hadwiger).

Im weiteren wird zusammengefasst was über die Vermutungen bekannt ist.

($k = 1, 2, 3$) In diesen Fällen sind beide Vermutungen offensichtlich richtig.

($k = 4$) Die folgenden beiden Tatsachen liefern einen Beweis der Hadwiger-Vermutung in diesem Fall:

- Jeder dreifach zusammenhängende Graph besitzt K_4 als Minor.
- Jeder zweifach zusammenhängende Graph ohne K_4 -Minor ist drei-färbbar.

($k = 5$) In diesem Fall ist die Hadwiger-Vermutung äquivalent zum Vier-Farben-Satz über planare Graphen. Das wurde 1937 von Wagner bewiesen.

($k = 6$) Robertson, Seymour und Thomas bewiesen die Hadwiger-Vermutung für diesen Fall im Jahr 1997.

Die Hajos-Vermutung ist für k gleich fünf und sechs noch offen. Für $k = 7$ ist sie falsch. Dazu betrachten wir ein Gegenbeispiel G mit $n = 13$ Knoten Die 13 Knoten sind auf fünf Blasen aufgeteilt, die untereinander einen Kreis bilden. Man sieht schnell, dass $\alpha(G) = 2$ und also $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil = \left\lceil \frac{13}{2} \right\rceil = 7$ gilt.

Beh. G enthält keine K_7 -Unterteilung.

Gäbe es eine K_7 -Unterteilung K , dann müssten wir zwischen jede zwei der Verzweigungsknoten von K sechs intern disjunkte Wege finden, weil es diese auch im K_7 gibt. Von den sieben Verzweigungsknoten müssen zwei aus nicht benachbarten Blasen sein. Damit es zwischen diesen zwei Knoten sechs intern disjunkte Wege gibt, müssen diese in den kleinen Blasen sein (in Abbildung 2 gelb markiert).

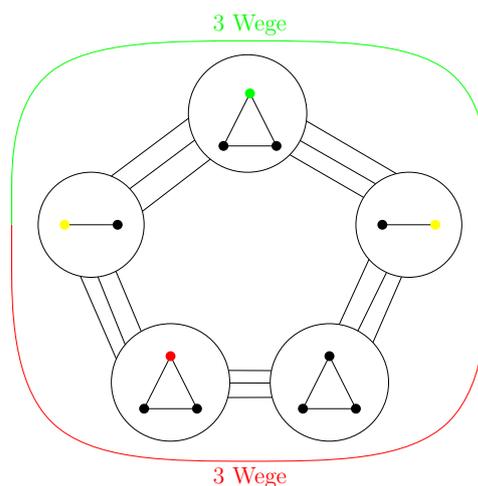


Abb. 2: Catlins Gegenbeispiel für die Hajos-Vermutung

Tatsächlich liefert diese Überlegung, dass es sich bei den 7 Verzweigungsknoten von K um die 4 Knoten der kleinen Blasen zusammen mit den 3 Knoten der Blase unmittelbar zwischen ihnen (grüner Punkt) handeln muss. Dem auf diesen Knoten induzierten Graphen fehlen 4 Kanten zum K_7 diese 4 Kanten müssen als disjunkte Pfade im unteren Teil realisiert sein. Das geht aber nicht da die Blasen dort 3-Separatoren sind.

20.2 Kantenfärbungen (chromatischer Index)

Definition 20.3 Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Ein Matching $M \subseteq E$ ist eine Kantenmenge, bzgl. derer jeder Knoten Grad ≤ 1 hat. In anderen Worten, M ist eine Kantenmenge, bei der keine zwei Kanten einen Knoten gemeinsam haben. M heißt *perfekt*, wenn alle Knoten von M getroffen werden, also alle Knoten genau Grad 1 haben.

Definition 20.4 $\chi'(G)$ definieren wir als die minimale Anzahl von Farben mit der man die Kanten von $G = (V, E)$ so färben kann, dass keine zwei benachbarten Kanten die gleiche Farbe haben.

Alternativ ergeben sich äquivalente Formulierungen:

- (i) $\chi'(G)$ ist die Größe einer minimalen Zerlegung der Kantenmenge E in Matchings;
- (ii) $\chi'(G)$ ist gleich der Färbungszahl χ des Kantengraphen (line graph) $\mathcal{L}(G)$.

Der Kantengraph von G ist der Graph, dessen Knoten die Kanten von G sind und dessen Kanten zwischen den auch im Originalgraphen benachbarten Kanten verlaufen. Also

$$\mathcal{L}(G) := \left(E, \left\{ \{e, e'\} \in \binom{E}{2} : e \cap e' \neq \emptyset \right\} \right).$$

Beispiel. Wir betrachten $G = Q_3$, den Würfel. Dessen Kantenfärbungszahl ist drei, wie in Abbildung 3 zu sehen.

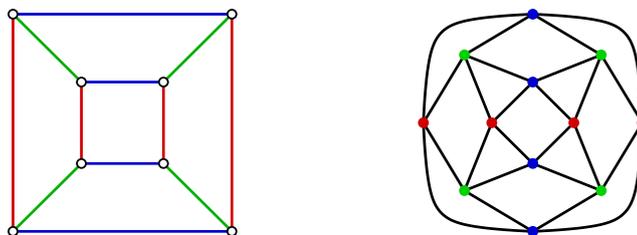


Abbildung 3: Q_3 mit einer Kantenfärbung (links). Der Kantengraph $\mathcal{L}(Q_3)$ (rechts).

Beobachtung. Für $\mathcal{L}(G)$ gilt

- (i) $\omega(\mathcal{L}(G)) = \Delta(G)$, außer wenn G der C_3 ist
- (ii) $\alpha(\mathcal{L}(G)) = \max_{M \text{ Matching in } G} |M|$.
- (iii) $\chi(\mathcal{L}(G)) = \chi'(G)$.

Der Maximalgrad und die Größe eines maximalen Matchings in G sind beide effizient berechenbar, sodass auch die Cliques- und Unabhängigkeitszahl eines Kantengraphen effizient berechenbar sind. Für kleine vollständige Graphen ist die Entwicklung der Kantenfärbungszahlen in Abbildung 4 dargestellt.

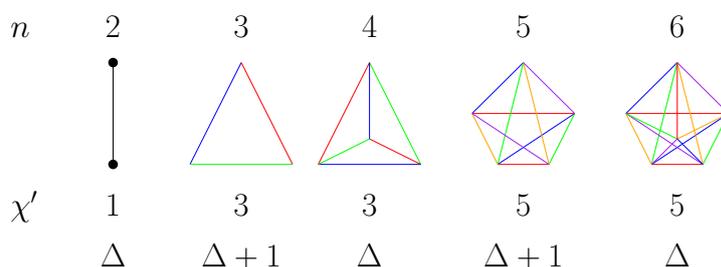


Abbildung 4: Minimale Kantenfärbungen für K_2 bis K_6 .

Allgemein gilt folgende Ungleichungskette:

$$\Delta(G) \leq \omega(\mathcal{L}(G)) \leq \chi(\mathcal{L}(G)) = \chi'(G)$$

Kommen wir nun zu einem Spezialfall:

Satz 20.5 (König)

Die Kantenfärbungszahl $\chi'(G)$ eines bipartiten Graphen G ist der Maximalgrad Δ_G .

Um diesen Satz zu beweisen, benutzen wir Matchingtheorie für bipartite Graphen.

Definition 20.6 Eine Knotenüberdeckung (vertex cover) $\mathcal{U} \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante aus E zu mindestens einem Knoten aus \mathcal{U} inzident ist.

In Abbildung 5 ist jeweils ein Matching und eine Knotenüberdeckung eines bipartiten Graphen dargestellt.

Der folgende Satz ist uns schon aus der Kombinatorik bekannt.

Satz 20.7 (König-Egervary)

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann ist die maximale Größe eines Matchings gleich der minimalen Größe einer Knotenüberdeckung von G .

Beweis. Offensichtlich gilt für jedes Matching M und für jede Knotenüberdeckung \mathcal{U} , dass $|M| \leq |\mathcal{U}|$. Schliesslich muss jede Matching-Kante von mindestens einem Knoten aus \mathcal{U} überdeckt werden

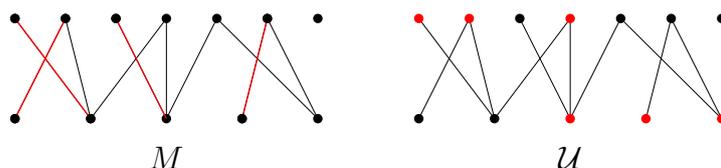
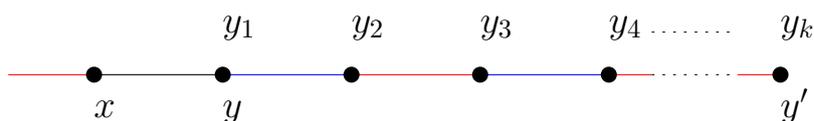


Abbildung 5: Beispiel für ein Matching und Knotenüberdeckung eines bipartiten Graphen

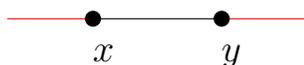
Wir wollen nun zeigen, dass immer ein Knoten $u \in V$ existiert, sodass u von jedem Maximum-Matching getroffen wird. Wenn wir dies haben, so folgt die Aussage induktiv, indem wir u in \mathcal{U} einfügen und mit $G \setminus u$ weiter iterieren. In jeder Iteration wächst $|\mathcal{U}|$ um eins, während die maximale Größe eines Matchings um eins sinkt.

Zum Beweis nehmen wir an, die Aussage wäre falsch. Wir betrachten $\{x, y\} \in E$. Sei M_x ein maximales Matching, das x vermeidet und M_y ein maximales Matching, das y vermeidet. Durch die Maximalität kann x von M_y und y von M_x getroffen. Sei $H = (V, M_x \cup M_y)$. Der Maximalgrad von H ist zwei, also zerfällt H in Kreise und Wege. Sei P der Weg in H der in y endet und y' der zweite Endknoten von P .



Wir behaupten, dass die an y' anliegende P -Kante rot ist. Andernfalls liefert der Farbtasch auf P ein rotes Matching mit einer zusätzlichen Kante. Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von M_y .

Also ändert ein Farbtasch auf P nichts an der Größe der Matchings und erzeugt diese Situation:



Nun kann aber die Kante (x, y) dem Matching M_x hinzugefügt werden, was der Maximalität von M_x widerspricht.

Damit ist der Satz bewiesen. □

Proposition 20.8 Wenn $G = (V, E)$ ein bipartiter k -regulärer Graph ist, so besitzt G ein perfektes Matching, das heißt ein Matching, das alle Knoten abdeckt.

Beweis. Sei \mathcal{U} eine minimale Knotenüberdeckung. Da G bipartit ist, ist jeder der Farbklassen von G ein Knotenüberdeckung. Damit gilt also $|\mathcal{U}| \leq \frac{1}{2}|V|$. Andererseits ist $k|\mathcal{U}| \geq |E|$ (doppeltes Abzählen der von \mathcal{U} überdeckten Kanten). Damit ist $k|\mathcal{U}| \geq |E| = \frac{k|V|}{2}$, also $|\mathcal{U}| = \frac{|V|}{2}$. Also gibt es ein Matching M mit $|M| = \frac{|V|}{2}$ und das ist ein perfektes Matching. △

Damit kommen wir zum

Beweis. (Satz von König). Sei G wie im Satz gegeben, sei G^+ ein Δ -regulärer Graph, der G als Subgraphen enthält. Zu zeigen, dass so ein G^+ existiert ist eine schöne Übungsaufgabe.

Nach Prop. 20.8 besitzt G^+ ein perfektes Matching M_1 . Der Graph $G^+ \setminus M_1$ ist $\Delta - 1$ -regulär und enthält daher ebenfalls ein perfektes Matching. So kann iteriert werden, bis $E_{G^+} = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_\Delta$. Diese Folge von Matchings induziert dann eine Δ -Kantenfärbung von G^+ , damit also auch eine Δ -Kantenfärbung von G . \square

20.3 Perfekte Graphen

Definition 20.9 Ein Graph G ist perfekt genau dann, wenn für alle induzierten Subgraphen H gilt $\chi(H) = \omega(H)$.

Wir wissen, dass für G bipartit gilt $\omega(\mathcal{L}(G)) = \Delta_G$. Außerdem ist $\chi(\mathcal{L}(G)) = \chi'(G)$ nach Definition der Kantengraphen. Nun liefert uns der Satz von König, dass $\Delta_G = \chi'(G)$, also ist die Cliquenzahl des Kantengraphen gleich der Knotenfärbungszahl. Jeder induzierte Subgraph H eines Kantengraphen $\mathcal{L}(G)$ ist der Kantengraph eines Subgraphen G' von G . Ausserdem sind Subgraphen von bipartiten Graphen natürlich bipartit. Also sind Kantengraphen von bipartiten Graphen perfekt.

Für einen bipartiten Graphen G gilt:

$$\omega(G) = 2 = \chi(G) \quad \text{wenn } E \neq \emptyset \text{ und andernfalls } \omega(G) = 1 = \chi(G).$$

Induzierte Subgraphen von bipartiten Graphen sind wieder bipartit. Also sind bipartite Graphen perfekt. Tatsächlich gilt:

Satz 20.10 Die folgenden vier Graphenklassen sind perfekt:

- (1) Bipartite Graphen.
- (2) Kantengraphen bipartiter Graphen.
- (3) Komplemente bipartiter Graphen.
- (4) Komplemente von Kantengraphen bipartiter Graphen.

Beweis. Die Aussagen (1) und (2) haben wir gerade bewiesen. Die Überlegungen weshalb induzierte Subgraphen nicht gesondert betrachtet werden müssen übertragen sich auf die beiden verbleibenden Fälle.

(3) Sei G Komplement eines bipartiten Graphen. Es gilt: $\omega(G) = \alpha(\overline{G}) = n - \nu(\overline{G})$, wobei $\nu(\overline{G})$ die minimale Größe einer Knotenüberdeckung bezeichnet. Da unabhängige Mengen in G nur Größe 1 oder 2 haben sind Färbungen, d.h. Partitionen in unabhängige Mengen, in Bijektion zu Matchings in \overline{G} und es gilt: $\chi(G) = n - \mu(\overline{G})$, wobei $\mu(\overline{G})$ die maximale Größe eine Matchings in \overline{G} bezeichnet. Mit $\nu(\overline{G}) = \mu(\overline{G})$, also dem Satz von König-Egervary folgt die Behauptung.

(4) Sei $G = \overline{\mathcal{L}(H)}$ für einen bipartiten Graphen H . Unabhängige Mengen von G entsprechen den *Sternen* von H , das sind maximale Mengen von Kanten die einen gemeinsamen Knoten haben. Eine minimale Überdeckung der Kanten mit Sternen entspricht einer minimalen Knotenüberdeckung, d.h. $\chi(G) = \nu(H)$. Cliques in G entsprechen unabhängigen Kantenmengen in H also Matchings. Daher ist $\omega(G) = \mu(H)$. Die Perfektheit folgt also wieder aus dem Satz von König-Egervary. \square

Bemerkung. Die im Satz aufgelisteten Graphenklassen spielen in der Charakterisierung perfekter Graphen eine zentrale Rolle.

Kantenfärbungen

In der vorigen Vorlesung haben wir bereits festgestellt, dass für bipartite Graphen die Kantenfärbungszahl gleich dem Maximalgrad ist. Im Folgenden zeigen wir, dass zwischen diesen beiden Werten im Allgemeinen kein großer Unterschied besteht.

21.1 Der Satz von Vizing

Wir wissen bereits, dass für alle Graphen gilt: $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Für bipartite Graphen gilt immer Gleichheit: $\chi'(G) = \Delta(G)$. Wie scharf die Ungleichung allgemein ist, zeigt der folgende

Satz 21.1 (Vizing) Für alle Graphen G gilt: $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis. Die untere Schranke haben wir bereits. Die obere Schranke zeigen wir, indem wir die Kanten der Reihe nach mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben färben. Dabei müssen wir gegebenenfalls bereits gefärbte Kanten umfärben.

Wir verwenden folgende Notation: Für $v \in V$ sei $R(v)$ die Menge der Restfarben, also die Farben aus $[\Delta + 1]$, die noch nicht für eine Kante an v verwendet wurden. Da jeder Knoten maximal Δ inzidente Kanten hat, ist $|R(v)| \geq 1$. Mit $r(v)$ sei jeweils eine beliebige aber feste Farbe aus $R(v)$ bezeichnet, also eine Farbe, die (noch) an keiner Kante an v verwendet wurde.

Wir wollen nun die bisher ungefärbte Kante (x, y) färben. Gibt es ein $\alpha \in R(x) \cap R(y)$, so färben wir die Kante in Farbe α . Wenn nicht, wird es interessant: Da $R(x) \cap R(y) = \emptyset$ gibt es eine Kante (x, y_2) in Farbe $c((x, y_2)) = r(y)$. Betrachten wir $r(y_2)$ gibt es wieder zwei Fälle: Entweder ist $r(y_2) \in R(x)$ oder wir finden eine Kante an x mit Farbe $r(y_2)$.

Iteriert man diese Überlegung, erhält man einen „Fächer“, also eine Folge (y_1, y_2, \dots, y_n) von Nachbarn von x mit $y = y_1$ und den Eigenschaften

$$\begin{aligned}c((x, y_{i+1})) &= r(y_i) =: \alpha_i \\ r(y_n) &\in R(x) \text{ oder } \exists j < n : r(y_n) = r(y_j).\end{aligned}$$

Dieser Begriff ist in Abbildung 1 dargestellt.

Falls $r(y_n) \in R(x)$ führen wir einen Farbtasch auf dem Fächer durch, indem wir die Kante (x, y_i) jetzt in Farbe $r(y_i)$ färben. Dadurch ist (x, y) gefärbt.

Andernfalls schauen wir uns den Pfad P in den Farben $\alpha_0 = r(x)$ und $\alpha_n = r(y_n) = r(y_j)$ an, der in y_n beginnt. Da α_0 aus $R(x)$ ist und nur die Kante (x, y_{j+1}) an x in α_n gefärbt ist, gibt es für diesen Pfad drei Möglichkeiten:

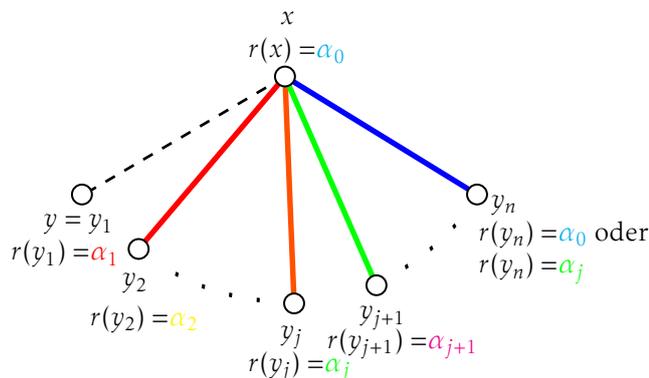


Abbildung 1: Ein Fächer.

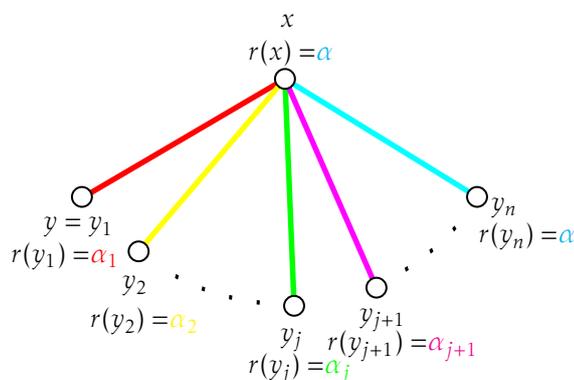


Abbildung 2: Der Fächer nach dem Farbtasch.

- (1) P endet in y_j
- (2) P enthält die Kante (x, y_{j+1}) (und endet in x).
- (3) P endet in $z \notin \{y_j, y_{j+1}, x\}$

Wir beschreiben nun die Vorgehensweise in den drei Fällen:

Fall 1: Nach einem Farbtasch auf P ist die α_0 -gefärbte Kante an y_j jetzt α_j -gefärbt und α_0 an y_j frei. Ein Farbtasch auf $(x, y = y_1, y_2, \dots, y_j)$ färbt (x, y) .

Fall 2: Wir verwenden einen Farbtasch auf $(x, y = y_1, y_2, \dots, y_n)$, bei dem wir die Kante (x, y_n) ungefärbt lassen. Dadurch ist die Kante (x, y_{j+1}) nicht mehr in α_n gefärbt ($\alpha_j = \alpha_n$), also können wir auf P zwischen y_n und y_{j+1} einen Farbtasch durchführen. Dadurch wird α_0 an y_n frei und wir können (x, y_n) in α_0 färben.

Fall 3: Wenn P in z endet, ist die andere Farbe aus $\{\alpha_0, \alpha_j\}$ noch frei. Wir können also entlang P die Farben tauschen und erhalten $r(y_n) = \alpha_0$. Mit einem Farbtasch auf $(x, y = y_1, y_2, \dots, y_n)$ können wir (x, y) färben. \square

21.2 Listenfärbungen

Sei Γ eine Menge von Farben, $G = (V, E)$ ein Graph und $L : V_G \rightarrow 2^\Gamma$ eine Funktion, die jedem Knoten v eine Liste $L(v)$ von Farben zuordnet. G ist L -färbbar, wenn eine Färbung $\gamma : V_G \rightarrow \Gamma$ existiert, sodass jeder Knoten v in einer Farbe seiner Liste gefärbt ist, also $\gamma(v) \in L(v)$.

Wir bekommen so für jede Funktion L ein eigenes Färbungsproblem. Um diese Probleme zusammenzuführen, definiert man die Listenfärbungszahl:

Definition 21.2 (Listenfärbungszahl)

Wenn G für jede Listenzuweisung L mit $|L(v)| \geq k$ für jedes v L -färbbar ist, dann ist die Listenfärbungszahl von G höchstens k . Symbolisch: $\chi_L(G) \leq k$.

Beobachtung. $\chi_L(G) \geq \chi(G)$, da die „normale“ Färbungszahl der Listenfärbung mit Listenzuweisung $|L(v)| = [k]$ für jedes v entspricht.

21.2.1 Listenfärbungen bipartiter Graphen

Schon für $\chi(G) = 2$ kann $\chi_L(G) = 2$ beliebig groß sein: Für alle k gibt es einen bipartiten Graphen G_k mit $\chi_L(G) \geq k$, nämlich den K_{k,k^k} mit folgenden Listen: Die k Knoten der kleineren Farbklasse (oben) haben alle disjunkte Listen L_1, L_2, \dots, L_k der Größe k . Jede der Listen der k^k anderen Knoten (unten) entspricht einem der Elemente von $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_k$ (Transversale). Dann ist für jede Auswahl von Farben für die oberen k Knoten einer der unteren nicht färbbar.

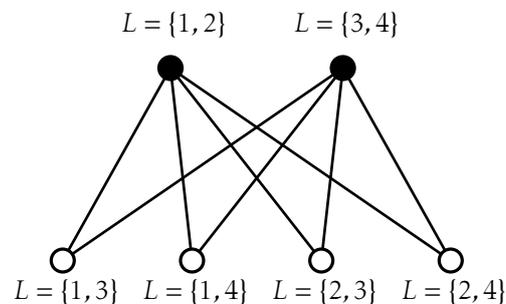


Abbildung 3: Beispiel für $k=2$.

Wir können jedoch eine Schranke für die Anzahl der Knoten eines bipartiten Graphen mit Listenfärbungszahl k angeben:

Proposition 21.3 $G = (X \dot{\cup} Y, E)$ bipartit mit n Knoten. Dann ist $\chi_L(G) \leq \log_2(n) + 1$.

Beweis. (randomisiert) Wir verteilen die Farben auf die beiden Knotenmengen X und Y , indem für jede Farbe $\gamma \in \Gamma$ unabhängig eine Münze werfen, die entscheidet, ob γ für Knoten aus X oder Y verwendet werden soll. Hat jeder Knoten eine Farbe

seiner Partitionsklasse in seiner Liste, dann bekommen wir auf diese Art eine zulässige L -Färbung.

Für jeden Knoten v ist $\Pr(v \text{ nicht färbbar}) = 2^{-|L(v)|} \leq 2^{-k}$. Damit ist

$$\Pr(\text{keine zulässige Färbung}) \leq \sum_v \Pr(v \text{ nicht färbbar}) \leq n \cdot 2^{-k}.$$

Also gibt es wenn $n < 2^{-k}$ ist, das gilt wenn $k > \log_2(n)$ ist, eine zulässige Färbung. \square

Beweis. (derandomisiert) Sei $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$. Wir entscheiden iterativ für jede Farbe, ob sie Γ_X oder Γ_Y zugewiesen werden soll, indem wir mit Gewichten arbeiten. Dabei bezeichnet $V_i = X_i \dot{\cup} Y_i$ in jedem Schritt die bis jetzt ungefärbten Knoten.

- Anfang: $w(v) = 1 \forall v$, $V_0 = V$ und damit $w(V) = n$.
- Iterationsschritt: zu γ_i sei $X_i = \{v \in V_{i-1} \cap X : \gamma_i \in L(v)\}$ und analog Y_i . Wenn $w(X_i) \geq w(Y_i)$, färbe die Knoten aus X_i in Farbe γ_i , lösche X_i , das heisst $V_i = V_{i-1} \setminus X_i$ und verdopple das Gewicht aller Knoten in Y_i . Andernfalls färbe die Knoten aus Y_i in Farbe γ_i , lösche Y_i und verdopple das Gewicht aller Knoten in X_i .

Dann fällt das Gewicht von V_i in jedem Schritt, denn

$$w(V_i) = w(V_{i-1}) + \min\{w(X_i), w(Y_i)\} - \max\{w(X_i), w(Y_i)\} \leq w(V_{i-1}).$$

Demnach ist

$$w(V_i) \leq w(V_0) \leq n.$$

Angenommen dies liefert keine zulässige L -Färbung von G . Dann gibt es am Ende einen ungefärbten Knoten v . Das heißt, dass sein Gewicht für jede Farbe in seiner Liste verdoppelt wurde. Folglich gilt:

$$w(V_s) \geq w(v) \geq 2^k > n.$$

Widerspruch. \square

Kantenfärbungen

22.1 Listenfärbungen und Kerne

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph bzw. eine Orientierung eines ungerichteten Graphen.

Definition 22.1 (Kern)

$K \subseteq V$ ist ein Kern in D , wenn gilt:

- K ist eine unabhängige Menge.
- Für jedes $v \in V \setminus K$ gibt es eine Kante $(v, u) \in A$ mit $u \in K$.

Beispiele:

[1.] Der C_5 hat in zyklischer Orientierung keinen Kern. Dreht man jedoch eine Kante um, gibt es einen Kern.

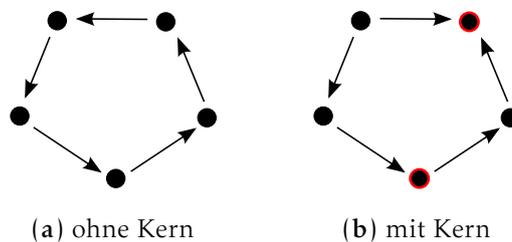


Abbildung 1: Orientierungen des C_5

[2.] Jeder Graph hat eine Orientierung, die einen Kern besitzt. Zum Beispiel kann man eine maximale unabhängige Menge K wählen und alle die einen Knoten in K enthalten zu diesem hin orientieren. Die Orientierung der übrigen Kanten ist unerheblich.

[3.] Für den Vergleichbarkeitsgraph $G(P)$ einer Ordnung $P = (X, <)$ mit der durch P gegebenen Orientierung ist die Menge der Minima von P ein Kern in $G(P)$.

[4.] Ist D eine azyklische Orientierung und π eine umgekehrte topologische Sortierung von D , d.h. $(i \rightarrow j) \in D \Rightarrow \pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(j)$, so ist die von Greedy mit Farbe 1 gefärbte Menge ein Kern.

Proposition 22.2 Wenn jeder induzierte Subgraph H von D einen Kern besitzt, dann ist D für jede Listenzuweisung mit $L(v) \geq \text{outdeg}(v) + 1$ für alle v Listenfärbbar.

Beweis. Induktion nach $|V|$. Sei α eine Farbe. Sei $V_\alpha = \{v : \alpha \in L(v)\}$ und K_α der Kern von $D[V_\alpha]$. Wir färben die Knoten aus K_α mit α und betrachten $D' := D[V \setminus K_\alpha]$. Jetzt zeigen wir, dass D' die Voraussetzungen erfüllt:

- Für $v \in V_\alpha \setminus K_\alpha$ müssen wir α aus der Liste von v löschen, d.h. $|L'(v)| = |L(v)| - 1 \geq \text{outdeg}_D(v) \geq \text{outdeg}_{D'}(v) + 1$, da K_α Kern in D_α ist.
- Für $v \in V \setminus V_\alpha$ gilt $|L'(v)| = |L(v)| \geq \text{outdeg}_D(v) + 1 \geq \text{outdeg}_{D'}(v) + 1$.

Also können wir D' (nach Induktion) mit den in den Listen L' verbliebenen Farben färben. □

22.2 Kantenlistenfärbungen

22.2.1 Der Satz von Galvin

Satz 22.3 Für bipartite Graphen G gilt $\chi'_L(G) = \Delta_G$.

Bemerkung. $\chi'_L(G) \geq \chi'(G) = \Delta_G$ nach dem Satz von König (20.5). Es wird vermutet, dass für alle Graphen G gilt: $\chi'_L(G) = \chi(G)$.

Beweis. Sei $G = (X \dot{\cup} Y, E)$ und $H = \mathcal{L}(G)$ der Line-Graph von G . Dann ist zu zeigen: $\chi_L(H) = \Delta_G$. Dafür suchen wir eine Orientierung D von H , mit der wir die Proposition 22.2 anwenden können. Wir wünschen uns:

1. $\text{outdeg}_D(e) \leq \Delta(G) - 1$ für alle $e \in E_G = V_H$.
2. Jeder induzierte Subgraph von D besitzt einen Kern.

Dafür betrachten wir die Kantenfärbung γ von G mit Farben $\{1, \dots, \Delta_G\}$, die der Satz von König liefert. Für $e, f \in E$ mit $e \cap f \neq \emptyset$ definieren wir die Orientierung

$$e \rightarrow f \iff \begin{cases} \gamma(e) < \gamma(f), \text{ für } e \cap f \in X \\ \gamma(e) > \gamma(f), \text{ für } e \cap f \in Y \end{cases}$$

Dann hat D die gewünschten Eigenschaften:

1. e hat höchstens einen *out*-Nachbarn für jede Farbe $\neq \gamma(e)$, also $\text{outdeg}_D(e) \leq \Delta_G - 1$.
2. D liefert uns eine Totalordnung auf den Kanten an jedem Knoten. Wir definieren:

$$\begin{aligned} y' \geq_x y &\iff (x, y) \rightarrow (x, y') &\iff \gamma(x, y) < \gamma(x, y') \\ x' \geq_y x &\iff (x, y) \rightarrow (x', y) &\iff \gamma(x, y) > \gamma(x', y) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 22.4 erhalten wir, dass es für alle $F \subseteq E$ ein stabiles Matching M_F in $(X \dot{\cup} Y, F)$ gibt. Wir zeigen, dass M_F ein Kern in $D[F]$, dem von F erzeugten Subgraphen von H mit der Orientierung von D , ist.

- M_F ist unabhängig in H , da M_F ein Matching ist.
- Sei (x, y) nicht in M_F . Da M_F stabil ist, gibt es $(x, y') \in M_F$ mit $y' >_x y$, d.h. $(x, y) \rightarrow (x, y')$, oder $(x', y) \in M_F$ mit $x' >_y x$, d.h. $(x, y) \rightarrow (x', y)$. \square

Satz 22.4 (Gale-Shapley)

Sei $G = (X \dot{\cup} Y, E)$ bipartit mit einer Totalordnung $<_v$ für jeden Knoten v auf seiner Nachbarschaft $N(v)$. Dann gibt es ein stabiles Matching M , also ein Matching mit der Eigenschaft, dass es für alle $(x, y) \in E \setminus M$ ein $(x, y') \in M$ mit $y' >_x y$ oder ein $(x', y) \in M$ mit $x' >_y x$ gibt.

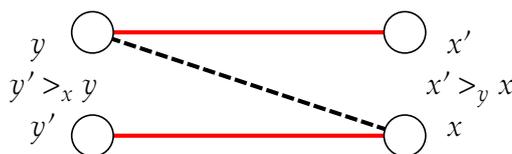


Abbildung 2: Ausschnitt aus einem stabilen Matching

22.3 Färbungen, Orientierungen und Polynome

22.3.1 Das Graph-Polynom und Färbbarkeit

Definition 22.5 Sei $G = (V, E)$ und $V = [n]$. Das Graph Polynom von G ist:

$$f_G(x_1, x_2, \dots, x_n) := \prod_{(i,j) \in E, i < j} (x_i - x_j).$$

Proposition 22.6 Sei $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$. Die Abbildung $i \rightarrow c_i$ ist genau dann eine zulässige Färbung von G , wenn $f_G(c_1, c_2, \dots, c_n) \neq 0$.

Beweis. Wir verwenden, dass \mathbb{Z} keine Nullteiler hat. Daher gilt:

$$\begin{aligned} f_G(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 &\iff (c_i - c_j) = 0 \text{ für einen der Faktoren von } f_G \\ &\iff c_i = c_j \text{ für eine Kante } (i, j) \in E. \end{aligned}$$

\square

22.3.2 Die Koeffizienten und Orientierungen

Sei D eine Orientierung von G . Wir definieren das Gewicht $w(D) := \prod_{e \in E} w_D(e)$ von D als Produkt der Gewichte auf den Kanten $e = (i \rightarrow j)$, wobei

$$w_D(i \rightarrow j) := \begin{cases} -x_j & \text{falls } i < j \\ x_i & \text{falls } i > j \end{cases}$$

Proposition 22.7

$$f_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{D \text{ Orientierung von } G} w(D).$$

Beweis. Jeder der 2^n Terme des ausmultiplizierten Produkts in der Definition 22.5 entspricht genau einer Orientierung von G . □

Beispiel

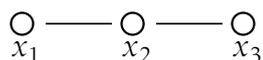


Abbildung 3: Ein Graph G mit $f_G = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)$.

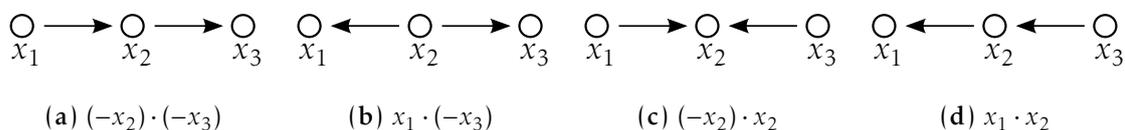


Abbildung 4: Orientierungen von G und die zugehörigen Summanden von f_G .

Die Standarddarstellung von f_G entsteht durch das Zusammenfassen von Summanden zum gleichen Monom $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$. Da $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ die Gradsequenz eines gerichteten Graphen ist, gilt $\sum d_i = |E|$.

Eine Orientierung D heisst negativ, wenn $w(D)$ negativ ist. Das ist der Fall wenn die Anzahl der negativen Kantengewichte ungerade ist. Damit definieren wir uns

$$DN(d) = \{\text{negative Orientierungen mit Gradsequenz } d = (d_1, d_2, \dots, d_n)\}$$

$$DP(d) = \{\text{positive Orientierungen mit Gradsequenz } d = (d_1, d_2, \dots, d_n)\}$$

Proposition 22.8

$$f_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{d=(d_1, d_2, \dots, d_n) \\ \sum d_i = |E|}} (|DP(d)| - |DN(d)|) \cdot x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}.$$

Beweis. Ist nur eine Umformulierung der Proposition 22.7 mit den neu eingeführten Begriffen. □

Lemma 22.9 Sei D eine Orientierung von G mit Gradsequenz d . Dann gibt es eine Bijektion

$$\{\text{Orientierungen von } G \text{ zu } d\} \longleftrightarrow \{\text{Eulersche Subgraphen von } D\}$$

Beweis. Ein eulerscher Subgraph ist in diesem Zusammenhang eine Kantenmenge $F \subseteq E_D$, so dass $\text{indeg}_F(v) = \text{outdeg}_F(v)$. Auf den Zusammenhang und damit auf die Existenz eines Eulerkreises in (V, F) wird verzichtet.

(\Rightarrow) Sei D' eine Orientierung mit Gradsequenz d . Sei $F = D \oplus D'$ die Menge der Kanten, die in D und D' unterschiedlich orientiert sind. Wir betrachten F mit der von D geerbten Orientierung. Für jeden Knoten v gilt:

$$\begin{aligned} d(v) &= \text{outdeg}_D(v) = \text{outdeg}_{D \cap D'}(v) + \text{outdeg}_F(v) \\ &= d'(v) = \text{outdeg}_{D'}(v) = \text{outdeg}_{D \cap D'}(v) + \text{indeg}_F(v) \\ \implies \text{outdeg}_F(v) &= \text{indeg}_F(v) \end{aligned}$$

Also ist F ein eulerscher Subgraph.

(\Leftarrow) Sei $D' = D(-F)$ die Orientierung, in der die Kanten deseulerschen Subgraphen F von D umgedreht wurden. Dann ist

$$\begin{aligned} d'(v) &= \text{outdeg}_{D'}(v) = \text{outdeg}_{D \cap D'}(v) + \text{indeg}_F(v) \\ &= \text{outdeg}_{D \cap D'}(v) + \text{outdeg}_F(v) = \text{outdeg}_D(v) = d(v) \end{aligned}$$

Also hat D' die gleiche Gradsequenz wie D .

Da weiterhin $D(-F) \oplus D = F$ für alle eulerschen Subgraphen F gilt, haben wir eine Bijektion. □

Listenfärbungen und der Satz von Alon–Tarsi

In der vorigen Vorlesung haben wir das Graph-Polynom definiert und einen Bezug zur Färbbarkeit von Graphen hergestellt. Anschliessend haben wir positive und negative Orientierungen sowie eulersche Subgraphen studiert. Daran wollen wir nun anknüpfen und dann den Satz von Alon–Tarsi formuliert und bewiesen.

Wir beginnen mit der Unterscheidung zwischen ungeraden und geraden eulerschen Orientierungen:

$$EU(D) = \{S : S \text{ ist eulerscher Subgraph von } D \text{ mit einer ungeraden Kantenzahl}\}$$

$$EG(D) = \{S : S \text{ ist eulerscher Subgraph von } D \text{ mit einer geraden Kantenzahl}\}.$$

Lemma 23.1 Die Koeffizienten des Graph-Polynoms $f_G = \sum K_{d_1, \dots, d_n} \cdot x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$ sind bis auf das Vorzeichen gegeben durch

$$|K_{d_1, \dots, d_n}| = \left| |DP(d_1, \dots, d_n)| - |DN(d_1, \dots, d_n)| \right| = \left| |EG(D)| - |EU(D)| \right|.$$

Beweis. In Proposition 22.8 haben wir die erste Gleichung gezeigt:

$$K_{d_1, \dots, d_n} = |DP(d_1, \dots, d_n)| - |DN(d_1, \dots, d_n)|.$$

In Lemma 22.9 haben wir eine Bijektion zwischen den Orientierung mit Gradsequenz d und den eulerschen Subgraphen einer festen Orientierung mit Gradsequenz d bewiesen. Diese Bijektion respektiert das Vorzeichen. genaugenommen gilt:

$$\begin{aligned} D \in DP(d_1, \dots, d_n) &\Rightarrow |EG(D)| = |DP(d_1, \dots, d_n)| \text{ und } |EU(D)| = |DN(d_1, \dots, d_n)| \\ D \in DN(d_1, \dots, d_n) &\Rightarrow |EG(D)| = |DN(d_1, \dots, d_n)| \text{ und } |EU(D)| = |DP(d_1, \dots, d_n)|. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 23.2 (Alon, Tarsi)

Sei D eine Orientierung von G mit $|EG(D)| \neq |EU(D)|$ und $\text{outdeg}(v) \leq k$ für alle $v \in V_G$, dann folgt $\chi_L(G) \leq k + 1$.

Beispiel. Wir betrachten den C_5 mit den Orientierungen D_1 und D_2 aus Abb. 1. Da die leere Menge die Kantenmenge eines eulerschen Subgraphen des C_5 ist, gilt $|EG(D_1)| = 1 = |EU(D_1)|$. Für D_2 gilt $|EG(D_2)| = 1$, $|EU(D_2)| = 0$ und $\text{outdeg}(v) \leq 2$ für alle $v \in V$. Somit folgt $\chi_L(C_5) \leq 3$.



Abbildung 1: Zwei Orientierungen des C_5 .

Beispiel. Sei G ein bipartiter Graph mit einer Orientierung D und einem eulerschen Subgraphen S . Wir können S in eine Menge disjunkter Kreise zerlegen: $E_S = \dot{\cup}_{k \in K} E_k$, wobei K eine Familie von Kreisen bezeichnet. Da $|E_k|$ für jedes $k \in K$ gerade ist, ist $S \in EG(D)$. Für bipartite Graphen gilt daher $|EU(D)| = 0$ für alle Orientierungen D . Insgesamt folgt $\chi_L(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$ weil eine entsprechende Orientierung D immer gefunden werden kann (das folgt z.B. aus dem Satz von König (20.5)).

Lemma 23.3 (Kombinatorischer Nullstellensatz)

Sei $P = P(x_1, \dots, x_n)$ ein Polynom in $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Der Grad von P als Polynom in x_i sei $\leq k_i$. Für alle $i \in [n]$ sei $S_i \subseteq \mathbb{Z}$ mit $|S_i| \geq k_i + 1$. Wenn $P(t_1, \dots, t_n) = 0$ für alle $(t_1, \dots, t_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$, dann ist P das Nullpolynom ($P \equiv 0$).

Beweis. Wir verwenden Induktion nach n . Der Induktionsanfang bei $n = 1$ ist einfach: $P = P(x)$, $\text{grad}(P) \leq k$. Wenn P mehr als k Nullstellen hat dann ist P das Nullpolynom (andernfalls liefert jede Nullstelle einen Linearfaktor).

Induktionsschritt: Wir betrachten P als Polynom in x_n mit Koeffizienten im Ring $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Also ist $P = \sum_{j=0}^{k_n} P_j(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^j$. Für jedes feste Tupel $(t_1, \dots, t_{n-1}) \in S_1 \times \dots \times S_{n-1}$ hat $P_i(x_n) = \sum_{j=0}^{k_n} P_j(t_1, \dots, t_{n-1})x_n^j \in \mathbb{Z}[x_n]$ alle $s \in S_n$ als Nullstellen. Wegen $|S_n| = k_n + 1$ und $\text{grad}_n(P) = k_n$ ist $P(x_n)$ das Nullpolynom aus $\mathbb{Z}[x_n]$. Das bedeutet aber, dass alle Koeffizienten selbst Null sind, d.h. $P_j(t_1, \dots, t_{n-1}) = 0$.

Nun betrachten wir für festes j das Polynom $P_j(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Der Grad von P_j als Polynom in x_i ist $\leq k_i$ und $P_j(t_1, \dots, t_{n-1}) = 0$ für alle $(t_1, \dots, t_{n-1}) \in S_1 \times \dots \times S_{n-1}$. Laut Induktionsannahme bedeutet das $P_j \equiv 0$. Wegen $P = \sum P_j x_n^j$ gilt also auch $P \equiv 0$. □

Beweis [Alon–Tarsi].

Sei G mit Farblisten $L(v)$ und einer Orientierung D gegeben, so dass für alle Knoten v_i gilt $|L(v_i)| \geq k_i + 1$ und $\text{outdeg}(v_i) \leq k_i$. Wir behaupten, dass dann eine L -Listenfärbung existiert. Zum Beweis der Behauptung definieren wir $S_i = L(v_i)$ und wollen nun die Existenz von $(t_1, \dots, t_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ mit $f_G(t_1, \dots, t_n) \neq 0$ folgern. Die Voraussetzung aus dem Satz liefert $|EG(D)| \neq |EU(D)|$, mit Lemma 23.1 impliziert das $f_G \neq 0$.

Es gilt $\text{grad}(f_G, x_i) = \text{deg}(v_i)$ und das ist im Allgemeinen $> \text{outdeg}_D(v_i)$. Daher können wir aus $f_G \neq 0$ nicht direkt auf die Existenz einer L -Listenfärbung schließen. Dieses Problem wird dadurch gelöst, dass wir ein Polynom \bar{f}_G mit den folgenden drei Eigenschaften konstruieren:

- (1) $\bar{f}_G(t_1, \dots, t_n) = f_G(t_1, \dots, t_n)$ für alle $(t_1, \dots, t_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$.

(2) $\text{grad}(\bar{f}_G, x_i) = \text{outdeg}(v_i)$.

(3) Der Koeffizient von $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ in f_G und \bar{f}_G ist gleich.

Wenn so ein Polynom \bar{f}_G gegeben ist, dann gilt $\bar{f}_G \neq 0$ wegen $|K_{k_1, \dots, k_n}| = |EG(D) - EU(D)| \neq 0$ und (3). Wegen (2) können wir aus dem Nullstellensatz folgern, dass ein Tupel $(t_1, \dots, t_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ existiert, für das $\bar{f}_G(t_1, \dots, t_n) \neq 0$. Wegen (1) gilt $f_G(t_1, \dots, t_n) \neq 0$, also ist $c : i \rightarrow t_i$ eine zulässige Färbung von G mit Farben aus den Listen.

Die Konstruktion von \bar{f}_G : Betrachte $Q_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s) = x_i^{k_i+1} - \sum_{j=0}^{k_i} a_{ij} x_i^j$. Für alle $s \in S_i$ gilt $Q_i(s) = 0$, d.h. wir können $x_i^{k_i+1} = \sum_{j=0}^{k_i} a_{ij} x_i^j$ als Relation verwenden, um f_G zu transformieren. Die Transformation erlaubt den Grad von x_i zu senken bis er k_i ist, das ist (2). Die Auswertungen der transformierten Polynome bleiben für alle $(t_1, \dots, t_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ unverändert, das ist (1). Der Koeffizient von $\prod x_i^{k_i}$ bleibt unverändert, denn f_G ist homogen von Grad n . Monome, die durch Verwendung der Relation entstehen, haben immer einen kleineren Grad (Grad sinkt bei jeder Anwendung um mindestens 1). Damit ist gezeigt, dass wir ein Polynom \bar{f}_G mit den drei geforderten Eigenschaften konstruieren können. \square

Listenfärbungen und perfekte Graphen

24.1 Eine Anwendung des Satzes von Alon-Tarsi

Im vorhergehenden Kapitel wurde der Satz von Alon-Tarsi formuliert und bewiesen. Wir wollen nun Anwendungsmöglichkeiten des Satzes betrachten, d.h. wir interessieren uns für Orientierungen D mit $|EU(D)| \neq |EG(D)|$. Nützlich ist in diesem Zusammenhang häufig die Beobachtung, dass der kantenlose Subgraph immer in $EG(D)$ enthalten ist, so dass $|EG(D)| \geq 1$.

- Für jede Orientierung D eines bipartiten Graphen gilt $|EU(D)| = 0$ und also auch $|EU(D)| \neq |EG(D)|$.
- Ist D eine azyklische Orientierung, dann ist $|EG(D)| = 1$ und $|EU(D)| = 0$. Also liefert jede azyklische Orientierung eine Schranke an χ_L , diese Schranke ist auch mit Greedy und einer umgedrehten topologischen Sortierung beweisbar.

Proposition 24.1 Jeder Graph $G = (V, E)$ hat eine Orientierung D in der für alle v gilt:

$$\text{outdeg}(v) \leq \max\left(\frac{|E_H|}{|V_H|} : H \text{ Subgraph von } G\right).$$

Beweis. Sei d so dass für alle Subgraphen H von G gilt $|E_H| \leq d|V_H|$. Wir konstruieren einen bipartiten Hilfsgraphen B_d . Die Knoten der einen Seite von B_d sind die Kanten von G , auf der anderen Seite haben wir d Kopien für jeden Knoten von G . Jede Kante $\{x, y\}$ wird mit den d Kopien von x und den d Kopien von y verbunden.

Behauptung. B_d besitzt ein Matching M mit $|M| = E_G$.

Wenn die Behauptung stimmt, dann können wir so ein Matching M verwenden um eine Orientierung D_M von G zu konstruieren. Eine Kante $\{x, y\} \in E_G$ ist in D_M genau dann als $x \rightarrow y$ orientiert wenn $(\{x, y\}, x) \in M$ ist. Aufgrund der Größe von M ist so jede Kante orientiert. Da in B_d nur d Kopien von x existieren gilt $\text{outdeg}_{D_M}(v) \leq d$.

Zum Beweis der Behauptung überprüfen wir die Hall-Bedingung. Das heißt wir müssen zeigen, dass die Nachbarschaft von F in B_d groß genug ist, genau gesagt dass $|N_{B_d}(F)| \geq |F|$ für alle $F \subseteq E_G$.

Sei V_F die Menge der Knoten, die als Endknoten einer Kante aus F auftreten. Nun gilt $|N_{B_d}(F)| = d|V_F| \geq |E_G[V_F]| \geq |F|$. □

Folgerung. Sei G ein bipartiter planarer, so gilt $\chi_L(G) \leq 3$.

Beweis. Wenn G bipartit planar ist, dann gilt $|E| \leq 2|V| - 4$ (das zeigen wir später im Kapitel über Planarität). Da jeder induzierte Subgraph von G auch bipartit planar ist gewährleistet die Proposition die Existenz einer Orientierung mit $\text{outdeg}(v) \leq 2$ für alle v . Mit Alon-Tarsi bekommen wir jetzt $\chi_L(G) \leq 3$. \triangle

Ohne Alon-Tarsi hätten wir aus $|E_H| \leq 2|V_H| - 4$ für alle Subgraphen H schließen können, dass der Minimalgrad von jedem H höchstens 3 ist. Daraus folgt, dass eine Permutation $\pi = v_1, \dots, v_n$ existiert, sodass jeder Knoten v_i höchstens 3 Nachbarn mit größeren Indizes hat. Das impliziert mit Greedy immerhin die schwächere Schranke $\chi_L(G) \leq 4$.

24.2 Eine andere Anwendung des kombinatorischen Nullstellensatzes

Satz 24.2 Sei p prim und G ein Graph mit $d_{av} > 2p - 2$ und $\Delta \leq 2p - 1$. Dann existiert ein p -regulärer Subgraph von G .

Bemerkung. Der vorhergehende Satz gilt auch für p Primpotenz. Der allgemeine Fall ist offen. Im Beweis verwenden wir die folgende Variante des Kombinatorischen Nullstellensatzes^{XI}

Lemma 24.3 (Kombinatorischer Nullstellensatz II)

Sei $P = P(x_1, \dots, x_n)$ ein Polynom in $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ und seien (r_1, \dots, r_n) so dass $r_i \geq 0$ für alle i und $\text{grad}(P) = \sum_i r_i$. Wenn der Koeffizient $K_{r_1, \dots, r_n} \neq 0$ ist und $S_i \subseteq \mathbb{F}$ mit $|S_i| \geq r_i + 1$ für alle i , dann gibt es $(t_1, \dots, t_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ mit $P(t_1, \dots, t_n) \neq 0$.

Beweis. Für $v \in V$ und $e \in E$ sei $a_{v,e} = 1$, wenn $v \in e$, und $a_{v,e} = 0$ sonst. Wir betrachten das Polynom $F := F_1 - F_2$ wobei

$$F_1 = \prod_{v \in V} (1 - (\sum_{e \in E} a_{v,e} x_e)^{p-1}), \quad \text{und} \quad F_2 = \prod_{e \in E} (1 - x_e).$$

Es gilt: $\text{grad}(F_1) = (p-1)|V| < \frac{d_{av}}{2}|V| = |E|$ und $\text{grad}(F_2) = |E|$. Damit ist auch $\text{grad}(F) = |E|$. Der Koeffizient von $\prod x_e$ in F ist $(-1)^{|E|} \neq 0$.

Für die Anwendung des Nullstellensatzes 24.3 wählen wir $r_i = 1$ für alle i . Dann gilt $|S_i| > r_i$ und wir bekommen ein $\hat{x} \in \{0, 1\}^{|E|}$ mit $F(\hat{x}) \neq 0$.

Behauptung. \hat{x} ist der charakteristische Kantenvektor des gesuchten Subgraphen.

Zunächst stellen wir fest, dass $\hat{x} \neq 0$, weil $F(0) = F_1(0) - F_2(0) = 1 - 1 = 0$. Damit gilt aber $F_2(\hat{x}) = 0$, so dass $F(\hat{x}) = F_1(\hat{x})$.

Nun erinnern wir uns an den kleinen Satz von Fermat: Für jedes $a \in \mathbb{F}_p^* = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ gilt $a^{p-1} = 1$.

^{XI}Für einen Beweis und weitere Anwendungen sei verwiesen auf: Noga Alon *Combinatorial Nullstellensatz*, Comb. Probab. Comput. 8, No.1-2, 7-29 (1999).

Wenn wir F_2 als Polynom über \mathbb{F}_p auffassen, können wir diesen Satz in jedem Faktor anwenden. Da wir aber schon wissen, dass $F_1(\hat{x}) \neq 0$, muss für jedes v gelten: $(\sum a_{v,e} \hat{x}_e) = 0$. Dies ist nur möglich wenn der Grad jedes Knotens im durch \hat{x} definierten Subgraphen $G[\hat{x}]$ ein Vielfaches von p ist. Sei also $\deg_{G[\hat{x}]}(v) = c_v \cdot p$. Weil $\hat{x} \neq 0$ gibt es Knoten mit $c_v > 0$. Aus der Voraussetzung $\Delta \leq 2p - 1$ folgt, dass für alle Knoten gilt $c_v < 2$. Also ist $G[\hat{x}]$ ein p -regulärer Subgraph. \square

24.3 Perfekte Graphen

Definition 24.4 Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann *perfekt*, wenn für alle $W \subseteq V$ gilt: $\chi(G[W]) = \omega(G[W])$.

Beispiel. Graphen der folgenden Klassen sind perfekt. Diese Klassen sind dabei hereditär, d.h. induzierte Subgraphen gehören in dieselbe Klasse.

- Bipartite Graphen,
- Komplemente bipartiter Graphen,
- Line-Graphen von bipartiten Graphen,
- Komplemente der Line-Graphen von bipartiten Graphen.

24.3.1 Chordale Graphen (Triangulierte Graphen)

Definition 24.5 Ein Graph ist genau dann *chordal*, wenn er keine induzierten Kreise der Länge ≥ 4 besitzt.

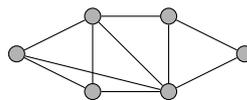


Abbildung 1: Ein chordaler Graph.

Beispiel 24.6 Graphen der folgenden Klassen sind chordal:
Bäume – Vollständige Graphen – Intervallgraphen.

Lemma 24.7 Sei $G = (V, E)$ ein chordaler Graph und $W \subseteq V$. Dann ist $G[W]$ chordal.

Die nächste Proposition liefert eine erste Charakterisierung chordaler Graphen.

Proposition 24.8 Ein Graph G ist chordal \iff jeder minimale Separator von G ist eine Clique.

Beweis. Wenn (\Leftarrow) G nicht chordal ist, dann gibt es einen induzierten Kreis C mit $|C| \geq 4$. Seien a und b nichtbenachbarte Knoten aus C und S eine minimale a, b trennende Menge. Der Separator S muss aus den beiden a, b Wegen auf C je mindestens einen Knoten enthalten. Diese beiden Knoten sind nicht benachbart, also ist S keine Clique.

(\Rightarrow) Sei nun G chordal, S ein minimaler Separator und $x, y \in S$. Angenommen die Kante (x, y) ist nicht in G . Wir betrachten Knoten a und b aus unterschiedlichen Komponenten von $G \setminus S$. Aus der Minimalität von S folgt, dass x und y Kanten in die Komponenten von a und b haben. Ausgehend von diesen Kanten finden wir vier Wege von x und y zu a und b . Im Träger dieser Wege finden wir einen kürzesten (sehenlosen) Kreis C der x und y enthält. Da C die Komponenten von a und b besucht ist die Länge ≥ 4 . Das ist ein Widerspruch. \square

Definition 24.9 Ein Knoten s ist genau dann ein *simplizialer Knoten*, wenn $N(s)$ eine induzierte Clique bildet.

Lemma 24.10 Jeder chordale Graph hat einen simplizialen Knoten.

Beweis. Mit Induktion beweisen wir die stärkere Aussage: *Jeder chordale Graph, der keine Clique ist, besitzt zwei nicht benachbarte simpliziale Knoten.*

Sei G chordal und keine Clique, dann finden wir zwei unabhängige Knoten a, b in G . Ein minimaler a, b trennender Separator S ist eine Clique. Sei $G_a = K_a \cup S$ wobei K_a die Komponente von $G \setminus S$ ist die a enthält. Den Graphen G_b definieren wir als $G \setminus K_a$. Als induzierte Subgraphen von G sind G_a und G_b chordal, so dass wir die Induktionsvoraussetzung auf beide anwenden können. Insbesondere besitzt G_a einen simplizialen Knoten a' der nicht zu S gehört und ebenso G_b einen simplizialen Knoten b' der nicht zu S gehört, Das Paar a', b' ist das gesuchte Paar simplizialer Knoten für G .

\square

Chordale Graphen

In der vorigen Vorlesung haben wir perfekte Graphen definiert und dann mit dem Studium der chordalen Graphen begonnen. Zur Erinnerung: Ein Graph heißt *chordal* (manchmal auch *trianguliert*), wenn er keinen induzierten Kreis der Länge größer gleich vier hat. Wir wissen schon:

- Chordale Graphen sind eine hereditäre Graphenklasse, das heißt: Ist G chordal und $W \subseteq V$, so ist auch $G_{[W]}$ chordal.
- Ein Graph G ist genau dann chordal, wenn jede minimal trennende Menge eine Clique ist (Proposition 24.8).
- Ein chordaler Graph besitzt einen simplizialen Knoten. (Lemma 24.10).

Definition 25.1 Eine *perfekte Eliminationsreihung (PER)* von G ist eine Totalordnung $\Lambda = (v_1, \dots, v_n)$ der Knoten mit der Eigenschaft: v_i ist simplizialer Knoten in $G[v_i, \dots, v_n]$.

Satz 25.2 Ein Graph G ist genau dann chordal wenn er eine perfekte Eliminationsreihung besitzt.

Beweis. (\Rightarrow) Da G chordal ist, existiert ein simplizialer Knoten v_1 in G . Da Chordalität eine hereditäre Eigenschaft ist finden wir in $G \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ einen simplizialen Knoten v_i . So entsteht eine PER.

(\Leftarrow) Angenommen es existiert ein induzierter Kreis C mit $|C| \geq 4$. Sei Λ eine PER und sei v_i der erste Knoten von C bezüglich Λ . Da v_i ein simplizialer Knoten in $G[v_i, \dots, v_n]$ ist sind die beiden Nachbarn von v_i durch eine Kante verbunden. Diese Kante ist eine Sehne von C . Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass es sich bei C um einen induzierten Kreis handelt. \square

Bemerkung. Die Erkennung chordaler Graphen ist in Polynomzeit möglich. Die Überprüfung alle Knoten auf Simplizialität ist naiv in $\mathcal{O}(n \cdot n^2)$ machbar, so dass ein PER in $\mathcal{O}(n^4)$ berechnet werden kann. Tatsächlich ist die Erkennung chordaler Graphen sogar in Linearzeit $\mathcal{O}(n + m)$ möglich.

Bemerkung. Chordale Graphen sind perfekt.

Beweis. Nutze zum Färben den Greedy-Algorithmus mit einer umgedrehten PER $\Lambda^{-1} = (v_n, \dots, v_1)$ als Färbungsreihenfolge. Für die Farbe $c(v_i)$ von v_i gilt dann:

$$c(v_i) \leq |N_{G[v_i, \dots, v_n]}(v_i)| + 1 \leq \omega(G).$$

Die erste der beiden Ungleichungen ist beim Greedy-Algorithmus immer erfüllt. Die zweite Ungleichung gilt weil v_i simplizial ist und also zusammen mit $N_{G[v_i, \dots, v_n]}(v_i)$ eine Clique bildet. Die Färbung braucht also nur $\omega(G)$ viele Farben. Da induzierte Teilgraphen von chordalen Graphen ebenfalls chordal sind, folgt die Behauptung. \square

25.1 Durchschnittsgraphen

Definition 25.3 Sei \mathcal{F} eine Familie von Teilmengen einer Menge X . Man definiert den Durchschnittsgraph $G_{\mathcal{F}}$ von \mathcal{F} wie folgt: $V := \mathcal{F}$, das heißt für jede Teilmenge $F \in \mathcal{F}$ gibt es einen Knoten v_F in $G_{\mathcal{F}}$, und $E := \{\{v_F, v_{F'}\} : F \cap F' \neq \emptyset\}$.

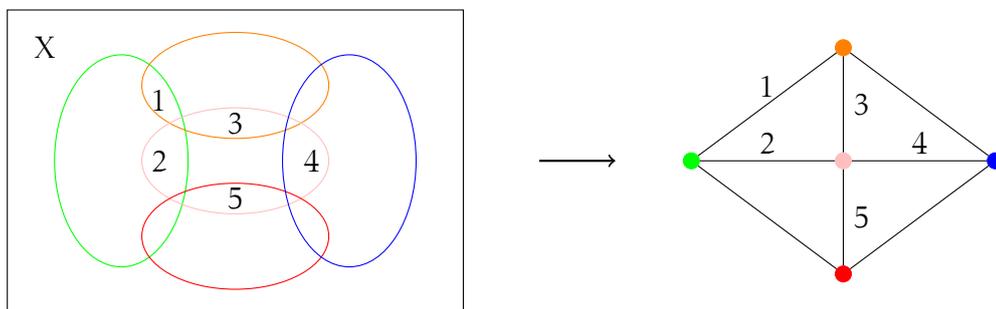
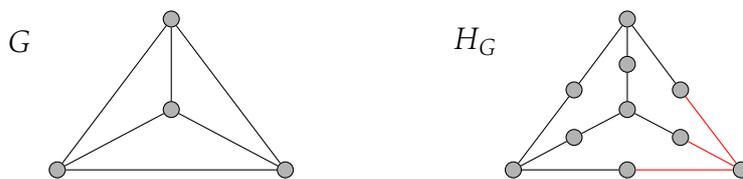


Abbildung 1: Eine Familie von Ellipsen und ihr Durchschnittsgraph.

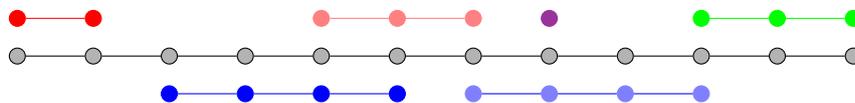
Bemerkung. Jeder Graph ist Durchschnittsgraph für ein geeignetes \mathcal{F} . Eine Möglichkeit, $G = (V, E)$ als Durchschnittsgraphen zu realisieren, ist die folgende: $\mathcal{F} = \{E_i : i \in V\}$, wobei E_i die Menge der zu $i \in V$ inzidenten Kanten ist. Es gelten aber auch stärkere Aussagen:

- Jeder Graph G ist Durchschnittsgraph von (induzierten) Teilgraphen eines Graphen H_G .



- Jeder Graph ist Durchschnittsgraph von Pfaden in einem Graphen.

Eine interessante Klasse von Graphen sind die *Intervallgraphen*. Diese Graphen sind definiert als die Durchschnittsgraphen von Teilpfaden eines Pfades



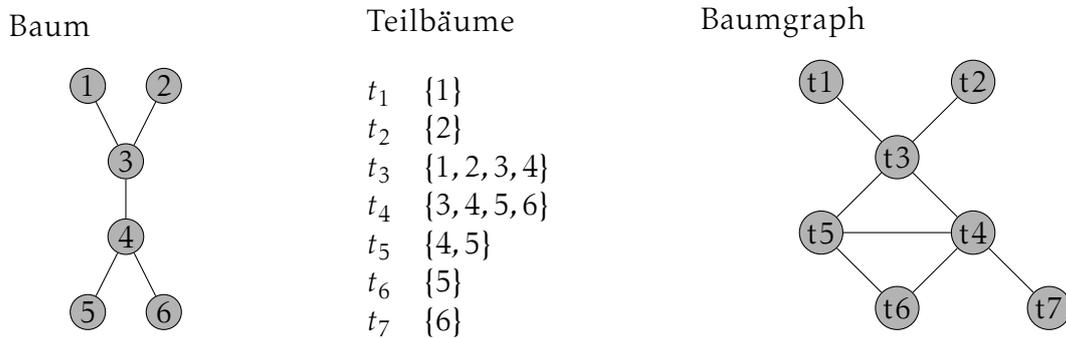


Abbildung 2: Beispiel eines Baumgraphen.

Definition 25.4 Baumgraphen sind Durchschnittsgraphen von Teilbäumen eines Baumes, dem Trägerbaum der Baumdarstellung.

Wir werden später sehen, dass ein Graph G genau dann chordal ist, wenn er ein Baumgraph ist. Als Vorbereitung darauf beweisen wir ein Lemma.

Lemma 25.5 Teilbäume eines Baumes haben die 1-Helly-Eigenschaft, das heißt wenn T_1, \dots, T_n paarweise nicht disjunkte Teilbäume von T sind, dann ist $\bigcap_i T_i \neq \emptyset$.

Beweis. Seien T_1, \dots, T_n Teilbäume von T mit $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ für alle $i \neq j$. Sei $v \in V$ der Knoten, der in möglichst vielen T_i enthalten ist. Ist $v \in T_i$ für alle i , so ist der Schnitt über alle T_i nicht leer und die Behauptung damit gezeigt. Angenommen es existiert ein j mit $v \notin T_j$. Sei $w \in T_j$ so gewählt, dass der (eindeutige) Weg von v nach w in T minimale Länge hat. Für alle i mit $v \in T_i$ existiert ein v_i mit $v_i \in T_i \cap T_j \neq \emptyset$. Da die T_i Bäume sind, sind sie insbesondere auch zusammenhängend, das heißt, sind $v, v_i \in T_i$, so gibt es auch einen v, v_i -Weg in T_i . Dieser Weg enthält insbesondere auch w . Damit ist w aber in mehr Teilbäumen enthalten als v , was im Widerspruch zur Wahl von v steht. □

Exkurs: Helly-Eigenschaft

Definition 25.6 Eine Familie $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ von Teilmengen von X hat die d -Helly-Eigenschaft, wenn aus der Annahme, dass der Durchschnitt jeder $(d + 1)$ -elementigen Teilmengen von \mathcal{C} nicht leer ist (d.h., $\forall I \in \binom{[n]}{d+1}$ gilt $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$) folgt, dass der Durchschnitt über \mathcal{C} nicht leer ist (d.h., $\bigcap_{i \in [n]} C_i \neq \emptyset$).

Bemerkung. Konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^d haben die d -Helly-Eigenschaft aber nicht die $(d - 1)$ -Helly-Eigenschaft.

Perfekte Graphen

In der vorigen Vorlesung haben wir chordale Graphen studiert und Baumgraphen definiert. Hier ist nun der schon angekündigte Satz:

Satz 26.1 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist äquivalent:*

- (1) G ist chordal
- (2) G ist ein Baumgraph

Beweis. (1 \Rightarrow 2) Wir verwenden Induktion über die Knotenzahl von $G = (V, E)$. Falls G eine Clique ist, ist G offensichtlich ein Baumgraph, also betrachten wir nur den Fall, dass G keine Clique ist. Dann wissen wir, dass 2 Knoten $a, b \in V$ und eine a - b trennende Clique S existieren.

Sei nun $W \subset V$ eine Komponente von $G \setminus S$. Weiter definieren wir $G_1 := G[W + S]$ und $G_2 := G[V \setminus W]$. Wir nehmen nun eine Baumgraphendarstellung von G_1 und G_2 auf B_1 und B_2 . Sei nun S_i eine maximale Clique mit $S \subset S_i$ in G_i für $i = 1, 2$. Es existieren Knoten $x_i \in B_i$ sodass $x_i \in T_v$ genau dann wenn $v \in S_i$, die Existenz der x_i folgt aus der 1-Helly-Eigenschaft von Bäumen. Einen zu G gehörigen Baum finden wir indem wir die beiden Bäume B_1 und B_2 über x_1 und x_2 verbinden. Die entsprechende Verbindungskante verwenden wir auch um die zu Knoten aus S gehörigen Teilbäume in B_1 und B_2 zu verschmelzen.

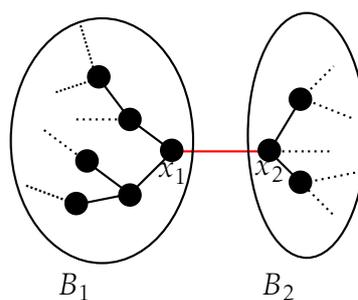


Abbildung 1

(1 \Leftarrow 2) 1. Beweis

Wir wollen zeigen, dass ein Baumgraph keine induzierten Kreise der Länge ≥ 4 enthält und damit ein chordaler Graph ist. Wir betrachten die Teilbäume von 3 aufeinanderfolgenden Knoten v_1, v_2, v_3 auf einem Kreis C mit $|C| \geq 4$. Außerdem dürfen wir annehmen, dass $|T_{v_2}| \geq 2$, da wir aus $|T_{v_2}| = 1$ bereits auf die Sehne v_1, v_3 schließen

könnten. Sei nun $e \in T_{v_2}$ eine Baumkante, sodass T_{v_1} und T_{v_3} in verschiedenen Komponenten von $T \setminus e$ liegen. Diese Kante e muss aber auch im Teilbaum T_v eines Knotens $v \in C \setminus v_2$ enthalten sein. Andernfalls würde sich der Kreis nicht schließen. Dies hat jedoch direkt zur Folge, dass $v, v_2 \in E(G)$, also haben wir eine Sehne gefunden und haben keinen Kreis der Länge ≥ 4 .

(1 \Leftarrow 2) 2. Beweis In diesem Beweis werden wir die Baumdarstellung von G nutzen um einen simplizialen Knoten von G zu identifizieren. Sei $\lambda = (x_1, \dots, x_n)$ eine perfekte eliminations Reihenfolge PER des Trägerbaumes B der gegebenen Baumdarstellung. Wir wählen i_0 minimal, so dass $B[x_1, \dots, x_{i_0}]$ einen Teilbaum T_{v_0} der Baumdarstellung enthält.

Behauptung. Für alle $w \in V(G)$ mit $T_w \cap T_{v_0} \neq \emptyset$ gilt: $x_{i_0} \in T_w$.

- 1. Fall: $T_w \subset B[x_1, \dots, x_{i_0}]$, dann ist klar, dass $x_{i_0} \in T_w$, denn wir haben i_0 minimal gewählt.
- 2. Fall: $T_w \not\subset B[x_1, \dots, x_{i_0}]$, dann enthält T_w die Verbindungskante (x_{i_0}, x_j) mit $j > i_0$ und also auch x_{i_0} .

Also ist v_0 ein simplizialer Knoten. Da die Klasse der Graphen die eine Baumdarstellung besitzen hereditär ist können wir das Argument iterieren und finden eine PER für G . Damit ist G laut Satz 25.2 chordal. □

26.1 Weitere Klassen perfekter Graphen

26.1.1 Vergleichbarkeitsgraphen

Definition 26.2 Sei $P = (X, <)$ eine Ordnung. Der Vergleichbarkeitsgraph $G_P = (X, E)$ ist der Graph, der für jede Relation von P eine Kante enthält, d.h.

$$e = (a, b) \in E \Leftrightarrow a < b \text{ oder } b < a \text{ in } P.$$

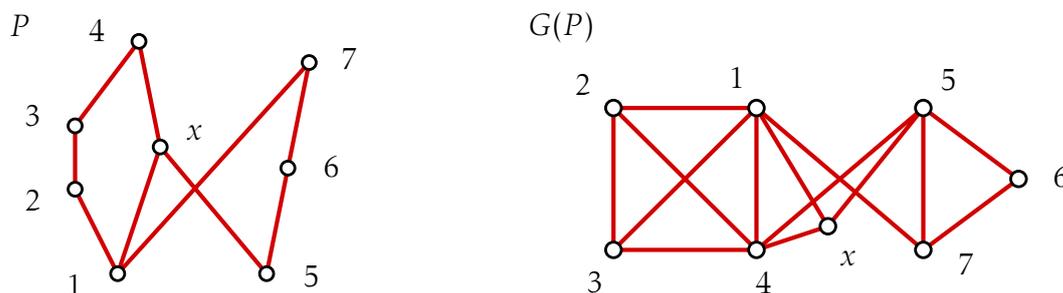


Abbildung 2: Ordnung P dargestellt durch das Diagramm und der Vergleichbarkeitsgraph $G(P)$.

Eine Kette in P ist eine Menge von paarweise vergleichbaren Elementen, entspricht also einer Clique in G_P . Die Höhe von P ist $h(P) = \omega(G_P)$, also die Anzahl der Elemente

einer längsten Kette in P . Die *Höhe eines Elements* x ist $h(x) = \#(\text{Elemente der längsten Kette in der } x \text{ maximales Element ist})$.

Eine *Antikette* in P ist eine Menge von paarweise unvergleichbaren Elementen, entspricht also einer unabhängigen Menge in G_P . Die *Weite* von P ist $w(P) = \alpha(G_P)$, also die Anzahl der Elemente einer größten Antikette in P .

Die kanonische Antikettenzerlegung von P definiert man als $A_1, \dots, A_{h(P)}$ mit

$$A_i = \{x \in X : h(x) = i\}.$$

Weil aus $x < y$ klarerweise $h(y) \geq h(x) + 1$ folgt, ist jedes A_i tatsächlich eine Antikette. Damit haben wir eine Zerlegung von G_P in $h(P) = \omega(G_P)$ unabhängige Mengen. Also ist $\chi(G_P) = \omega(G_P)$.

Da Vergleichbarkeitsgraphen eine hereditäre Graphenklasse sind ist damit gezeigt:

Satz 26.3 *Vergleichbarkeitsgraphen sind perfekt.*

Alternativ können wir eine optimale Färbung von G_P über lineare Erweiterungen von P bekommen. Eine *lineare Erweiterung* von P ist eine Permutation $L = x_1, \dots, x_n$ der Elemente von P so dass für jede Relation $x_i < x_j$ in P gilt $i < j$. Wird der Greedy-Färbungs-Algorithmus mit der Reihenfolge L verwendet, dann bekommt x die Farbe $h(x)$. Die Färbung entspricht also letztlich wieder der kanonische Antikettenzerlegung.

L	1	2	3	4	5	6	7	8
Farbe	1	1	2	2	3	2	4	3

26.1.2 Unvergleichbarkeitsgraphen

Unvergleichbarkeitsgraphen sind die Komplementgraphen von Vergleichbarkeitsgraphen. Also entsprechen Ketten von P unabhängigen Mengen in $\overline{G_P}$ und Antikette in P entsprechen Cliques in $\overline{G_P}$.

Aus der Kombinatorik kennen wir den Satz von Dilworth.

Satz 26.4 *Ist P eine endliche Ordnung. Dann gilt:*

$$\min(|C| : C \text{ Kettenzerlegung von } P) = \max(|A| : A \text{ Antikette in } P)$$

Aus dem Satz von Dilworth können wir direkt folgern, dass in Unvergleichbarkeitsgraphen gilt $\chi(\overline{G_P}) = \omega(\overline{G_P})$.

Da Unvergleichbarkeitsgraphen eine hereditäre Graphenklasse sind ist damit gezeigt:

Satz 26.5 *Unvergleichbarkeitsgraphen sind perfekt.*

26.2 Berge Vermutungen

Der Begriff des perfekten Graphen wurde 1963 von Claude Berge geprägt. Er hatte zwei Vermutungen von denen die schwächere 1972 von Lovász und die stärkere 2006 von Chudnovsky, Robertson, Seymour und Thomas bewiesen wurde.

[schwacher perfekter Graphensatz] G ist perfekt $\iff \bar{G}$ ist perfekt.

[starker perfekter Graphensatz] G ist perfekt $\iff G$ enthält keinen ungeraden induzierten Kreis der Länge ≥ 5 und kein ungerades induziertes Loch (Komplement eines Kreises) der Länge ≥ 5 .

Definition 26.6 Sei $G = (V, E)$ ein Graph, wir definieren

- G ist ω -perfekt $\iff \forall W \subset V : H = G[W]$ gilt $\chi(H) = \omega(H)$
- G ist α -perfekt $\iff \forall W \subset V : H = G[W]$ gilt $\Theta(H) = \alpha(H)$
- G ist produkt-perfekt $\iff \forall W \subset V : H = G[W]$ gilt $\alpha(H) \cdot \omega(H) \geq |V_H|$

Satz 26.7 Die 3 Begriffe von Perfektheit sind äquivalent, d.h.

$$G \text{ ist } \omega\text{-perfekt} \iff G \text{ ist produkt-perfekt} \iff G \text{ ist } \alpha\text{-perfekt.}$$

Bemerkung. Aus dem Satz folgt direkt der schwache perfekte Graphensatz. Zum Beweis des Satzes genügt es die erste Äquivalenz zu zeigen, denn (G ist α -perfekt $\iff \bar{G}$ ist ω -perfekt) und (G ist produkt-perfekt $\iff \bar{G}$ ist produkt-perfekt).

Beweis. (ω -perfekt \implies produkt-perfekt) Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $W \subset V$, $H = G[W]$. Nach Voraussetzung wissen wir, dass wir H mit $\chi(H) = \omega(H)$ Farben färben können. Da jede Farbklasse F_i eine unabhängige Menge in H ist, gilt außerdem $|F_i| \leq \alpha(H)$. Also

$$|V_H| = \sum_{i=1}^{\omega(H)} |F_i| \leq \sum_{i=1}^{\omega(H)} \alpha(H) = \alpha(H)\omega(H).$$

Definition 26.8 $G = (V, E)$ ist minimal- ω -imperfekt $\iff \chi(G) > \omega(G)$ aber für alle $W \subsetneq V$ gilt $\chi(G[W]) = \omega(G[W])$.

Bemerkung. Wenn G nicht perfekt ist, dann existiert ein $W \subset V$ sodass $G[W]$ minimal imperfekt ist.

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass wenn G minimal ω -imperfekt ist folgt, dass G nicht produkt-perfekt ist, das ist dann die zweite Implikation.

(produkt-perfekt \implies ω -perfekt) Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $I \subset V$ eine Unabhängige Menge. Wir definieren $G^- := G \setminus I$ und stellen fest, dass $\chi(G) \geq \chi(G^-) \geq \chi(G) - 1$ gilt. Wenn G minimal ω -imperfekt ist gilt auch $\chi(G) > \omega(G) \geq \omega(G^-) = \chi(G^-)$, also

$$\chi(G) > \chi(G^-) = \chi(G) - 1 \quad \text{und} \quad \omega(G) = \omega(G^-) \quad (\star)$$

Sei G nun minimal-imperfekt, $v \in V$, dann gilt nach Voraussetzung, dass $G \setminus v$ perfekt ist. Seien nun X_1, \dots, X_ω Farbklassen einer minimalen Färbung von $G \setminus v$ und Y eine ω -Clique von G .

Falls $v \in Y$, dann gibt es genau ein i_0 mit $X_{i_0} \cap Y = \emptyset$ und für alle anderen $j \neq i_0$ gilt $|X_j \cap Y| = 1$ (Jeder Knoten $w \in Y$ muss ja, da Y eine Clique ist eine eigene Farbe haben.). Mit dem gleichen Argument können wir auch für den Fall $v \notin Y$ folgern, dass für alle $j = 1, \dots, \omega$ gilt, dass $|X_j \cap Y| = 1$.

Sei nun S eine maximal unabhängige Menge in G , d.h. $|S| = \alpha(G)$. Für alle $v \in S$ seien S_1^v, \dots, S_ω^v die Farbklassen einer minimalen Färbung von $G \setminus v$. Zusammen mit S haben wir dann eine Sammlung von $\alpha \cdot \omega + 1$ unabhängigen Mengen.

Aus (\star) folgt für jedes S_i^x der Sammlung: $\omega(G \setminus S_i^x) = \omega(G)$ Sei Q_i^x eine Maximale Clique in $G \setminus S_i^x$. Wiederum aus (\star) folgt, dass $S_1^x, \dots, S_{i-1}^x, S_{i+1}^x, \dots, S_\omega^x, \{x\}$ eine optimale Färbung von $G \setminus S_i^x$ ist. Da Q_i^x eine Clique der Größe ω und jedes S_i^x eine unabhängige Menge ist, gilt:

$$|Q_i^x \cap S_j^x| = 1 \quad \forall i \neq j$$

und zusätzlich $x \in Q_i^x$. Damit gilt auch für jedes $y \neq x$ aus der unabhängigen Menge S , dass $y \notin Q_i^x$.

Betrachten wir nun eine $\omega(G) + 1$ Färbung von G : $\{y\}S_1^y, \dots, S_\omega^y$ wegen $y \notin Q_i^x$ bekommen wir

$$|Q_i^x \cap S_j^y| = 1 \quad \forall i, j.$$

Wenn zuletzt noch eine maximale Clique Q in $G \setminus S$ wählen, dann haben wir eine Familie \mathfrak{S} von $\alpha\omega + 1$ unabhängigen Mengen und eine Familie \mathfrak{Q} von $\alpha\omega + 1$ Cliques.

Wir definieren nun eine Bijektion $\gamma : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{Q}$:

$$\gamma(I) = \begin{cases} Q, & \text{falls } I = S \\ Q_i^x, & \text{falls } I = S_i^x \end{cases}$$

Die oben angestellten Überlegungen ergeben für $I \in \mathfrak{S}$ und $C \in \mathfrak{Q}$

$$|I \cap C| = \begin{cases} 0, & \text{falls } C = \gamma(I) \\ 1, & \text{andernfalls.} \end{cases} \quad (\star\star)$$

Der Beweis wird mit einem der linearen Algebra entlehnten Rangargument zuendegebracht. Dazu definieren wir uns vier Matrizen:

- **I** sei die $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ Identitätsmatrix.
- **J** sei die $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ Einsmatrix, d.h. alle Einträge sind 1.
- **A** sei die $(\alpha\omega + 1) \times n$ Matrix deren Zeilen die charakteristischen Vektoren der unabhängigen Mengen aus \mathfrak{S} sind.
- **B** sei die $n \times (\alpha\omega + 1)$ Matrix deren Spalten die charakteristischen Vektoren der Cliques aus \mathfrak{Q} sind.

Weiterhin fordern wir, dass die zur i -ten Zeile von \mathbf{A} und zur i -ten Spalte von \mathbf{B} gehörenden Mengen durch die Bijektion γ aufeinander abgebildet werden.

Aus (★★) folgt damit die Matrixgleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$.

Die Matrix auf der rechten Seite hat vollen Rang: $\text{rang}(\mathbf{J} - \mathbf{I}) = \alpha\omega + 1$ (Lemma 27.1). Daraus folgt, dass $\text{rang}(\mathbf{A}) \geq \alpha\omega + 1$. Aus Formatgründen gilt $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq n$. Damit ist die Ungleichung $\alpha(G)\omega(G) < |V_G|$ für den minimal ω -imperfekten Graphen G bewiesen. \square

Polytop der unabhängigen Mengen

In dieser Vorlesung wird zunächst das fehlende Lemma zum Beweis des schwachen perfekte-Graphen-Satzes aus der letzten Vorlesung nachgetragen. Hauptthema der Vorlesung ist das Polytop der unabhängigen Mengen. Dieses Polytop entsteht als konvexe Hülle der charakteristischen Vektoren der unabhängigen Mengen eines Graphen. Diese Vektoren spannen als 0-1-Vektoren ein Polytop im Einheitswürfel auf das als $STAB(G)$ bezeichnet wird. Wir werden neben $STAB$ auch noch die Relaxationen $ESTAB$ und $QSTAB$ kennenlernen. Das Konzept des Polytops der unabhängigen Mengen wird letztlich verwendet, um einen alternativen Beweis des schwachen perfekte-Graphen-Satzes zu geben. Der Beweis wurde tatsächlich erst in der 28. Vorlesung abgeschlossen, ist aber in dieses Kapitel übernommen worden.

27.0.1 Das fehlende Lemma

Lemma 27.1 Für die $n \times n$ Matrizen I (Identität) und J (alles Eins) gilt: $\text{rang}(J - I) = n$.

Beweis. Wir führen den Beweis im Fall $n = 4$, der allgemeine Fall geht genauso.

$$J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ziehe } S_1 \text{ von } S_i \text{ ab } (i > 1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{addiere } Z_i \text{ zu } Z_1 (i > 1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{addiere } S_i \text{ zu } S_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also ist $\det(J - I) = \pm 3 \neq 0$ dies impliziert $\text{rang}(I - j) = 4$. □

27.1 Das Polytop der unabhängigen Mengen

Definition 27.2 $STAB(G) = \text{conv}(\mathbb{1}_S : S \text{ unabhängig in } G)$

Offensichtlich ist $STAB(G)$ ein 0-1-Polytop und also im Einheitswürfel. Als Ecken treten alle unabhängigen Mengen auf.

Beispiel. Wir betrachten den Graphen aus Abb 1, links. Die unabhängigen Mengen sind $\{\emptyset, a, b, c, ac\}$. Aus diesen unabhängigen Mengen ergibt sich das rechts dargestellte Polytop.

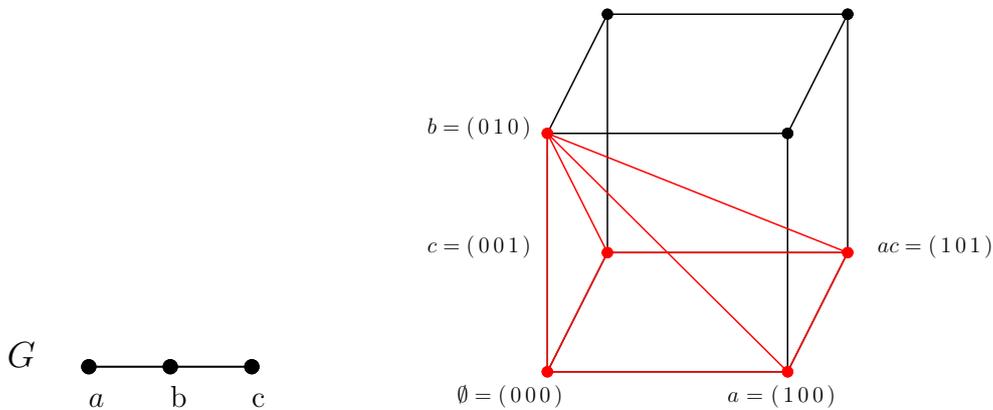


Abbildung 1: Ein Graph G und $STAB(G)$.

Sei nun $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Gewichtsfunktion. Wir definieren $\alpha(G, w) = \max(w(I) : I \text{ unabhängig in } G)$ wobei das Gewicht einer Menge I einfach additiv als $w(I) = \sum_{x \in I} w(x)$ festgelegt wird. $\alpha(G, w)$ ist also das maximale Gewicht einer unabhängige Menge.

Lemma 27.3 $\alpha(G, w) = \max(w^T x : x \in STAB(G))$

Beweis. Wir zeigen zunächst " \leq ". Wenn I unabhängig ist, dann ist der charakteristische Vektor $\mathbb{1}_I \in STAB(G)$. Nun gilt: $\alpha(G, w) = \max(w(I) : I \text{ unabhängig}) = \max(w^T \mathbb{1}_I : I \text{ unabhängig}) \leq \max(w^T x : x \in STAB)$.

Für die umgekehrte Richtung könnten wir als Tatsache benutzen, dass das Maximum einer linearen Funktion über einem beschränkten Polytop in einer Ecke angenommen wird. Also folgt aus \forall Ecken z von $STAB$ gilt $w^T z \leq \alpha(G, w)$ auch $\forall x \in STAB : w^T x \leq \alpha(G, w)$.

Die "Tatsache" kann leicht direkt nachgerechnet werden, das sieht in unserem Fall so aus: Jedes $x \in STAB(G)$ kann als Konvexkombination der Ecken dargestellt werden, also existieren Koeffizienten $\lambda_I \geq 0$, sodass $\sum \lambda_I \mathbb{1}_I = x$ und $\sum \lambda_I = 1$. Damit gilt: $w^T x = \sum \lambda_I w^T \mathbb{1}_I \leq \sum \lambda_I \alpha(G, w) = \alpha(G, w)$. □

Bemerkung. Da die Berechnung von $\alpha(G)$ ein NP-schweres Problem ist folgt, dass auch die Optimieren über dem Polytop STAB NP-schwer ist.

Wir haben eine V -Beschreibung von STAB (als konvexe Hülle), wir hätten aber lieber eine H -Beschreibung (durch Ungleichungen). Um uns so einer Beschreibung anzunähern sammeln wir nun einige gültige Ungleichungen:

$$\begin{aligned} (S_1) \quad & 0 \leq x_i \leq 1 && \forall i \quad (\text{Positivität}) \\ (S_2) \quad & x_i + x_j \leq 1 && \forall i, j \in E_G \quad (\text{Kantenungleichungen}) \end{aligned}$$

Definition 27.4 Das durch die Ungleichungen (S_1) und (S_2) definierte Polytop nennen wir ESTAB.

Da (S_1) und (S_2) gültige Ungleichungen für STAB sind gilt: $\text{STAB}(G) \subseteq \text{ESTAB}(G)$. Der folgende Satz charakterisiert den Gleichheitsfall.

Satz 27.5 $\text{STAB}(G) = \text{ESTAB}(G) \iff G$ ist bipartit.

Beweis. Wir zeigen zunächst " \implies " mit einem indirekten Argument: Wenn G nicht bipartit ist, dann ist einen ungerader Kreis C in G enthalten ($|C| = 2k + 1$). Wir betrachten nun den Vektor $\frac{1}{2}\mathbb{1}_C$. Dieser erfüllt alle Ungleichungen (S_1) und (S_2) und ist also in $\text{ESTAB}(G)$. Für alle I unabhängig gilt $\mathbb{1}_C^T \mathbb{1}_I \leq k$ aber $\mathbb{1}_C^T \frac{1}{2}\mathbb{1}_C = \frac{1}{2}(2k + 1) > k$. Also ist $\frac{1}{2}\mathbb{1}_C$ nicht in $\text{STAB}(G)$ und somit $\text{ESTAB}(G) \supsetneq \text{STAB}(G)$.

Nun zur Gegenrichtung " \impliedby ". Hier benutzen wir, dass ganzzahlige Vektoren aus ESTAB in STAB liegen (die ganzzahlige Version von (S_2) ist gerade die Definition einer unabhängigen Menge). Zusätzlich benutzen wir die folgenden beiden Tatsachen aus der Geometrie:

- (1) Sei P ein Polytop. Ein Vektor a ist eine Ecke von $P \iff$ für jede Gerade g durch a ist a Endpunkt von $g \cap P$.
- (2) Für Polytope $P \subseteq Q$ gilt: wenn jede Ecke von Q in P ist $\implies P = Q$.

Nun zu unserem Beweis. Sei G bipartit und sei $x \in \text{ESTAB}(G)$ ein nicht ganzzahliger Punkt. Wir werden zeigen, es gibt eine Strecke mit Mittelpunkt x die ganz in $\text{ESTAB}(G)$ liegt. Ist dies gezeigt, dann ist wegen (1) jede Ecke von $\text{ESTAB}(G)$ ganzzahlig und also in $\text{STAB}(G)$. Mit (2) folgt daraus dann $\text{STAB}(G) = \text{ESTAB}(G)$.

Sei $x \in \text{ESTAB}(G)$ nichtganzzahlig. Wir nennen eine Kante $e = (ij)$ *kritisch*, falls $x_i + x_j = 1$ gilt, und betrachten den Subgraphen G_x der kritischen Kanten. Sei H eine Zusammenhangskomponente von G_x und $i_0 \in V_H$ mit $0 < x_{i_0} < 1$. Sei U_1, U_2 die Bipartition von H mit $x_{i_0} \in U_1$. Wir definieren $g_t = x - t\mathbb{1}_{U_1} + t\mathbb{1}_{U_2}$. Für welche t ist g_t in ESTAB?

Aus den Bedingungen (S_1) folgt: $x_{i_0} - 1 \leq t \leq x_{i_0}$. Aus der Tatsache, daß alle aus H herausragenden Kanten nicht kritisch sind, folgt: $\exists \varepsilon > 0$ so, dass g_t für $-\varepsilon < t < \varepsilon$ die Bedingungen (S_2) erfüllt. Damit ist auf der Geraden g_t der Streckenabschnitt $t \in [\max\{-\varepsilon, x_{i_0} - 1\}, \min\{\varepsilon, x_{i_0}\}]$ als ganz in $\text{ESTAB}(G)$ enthalten nachgewiesen. Das wollten wir zeigen.

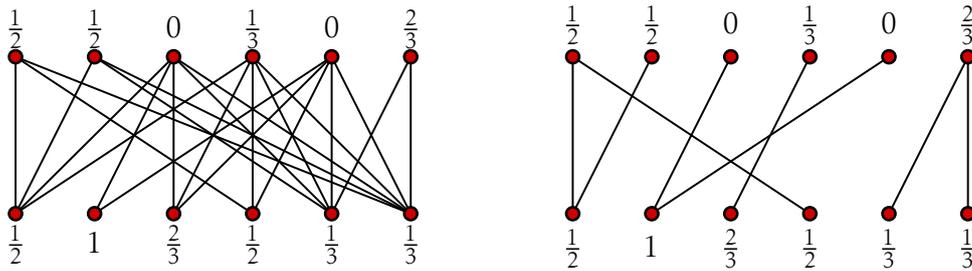


Abbildung 2: Ein bipartiter Graph mit einem nichtganzzahligen $x \in \text{ESTAB}$ (links), der Wert x_i steht beim Knoten i und der Graph G_x der kritischen Kanten (rechts).

Existiert keine Zusammenhangskomponente H , in der es ein solches i_0 gibt, so finden wir einen i_1 derart, dass $0 < x_{i_1} < 1$ und keine kritische Kante den Knoten i_1 enthält. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ für alle $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ auch $x + te_{i_1} \in \text{ESTAB}(G)$. \square

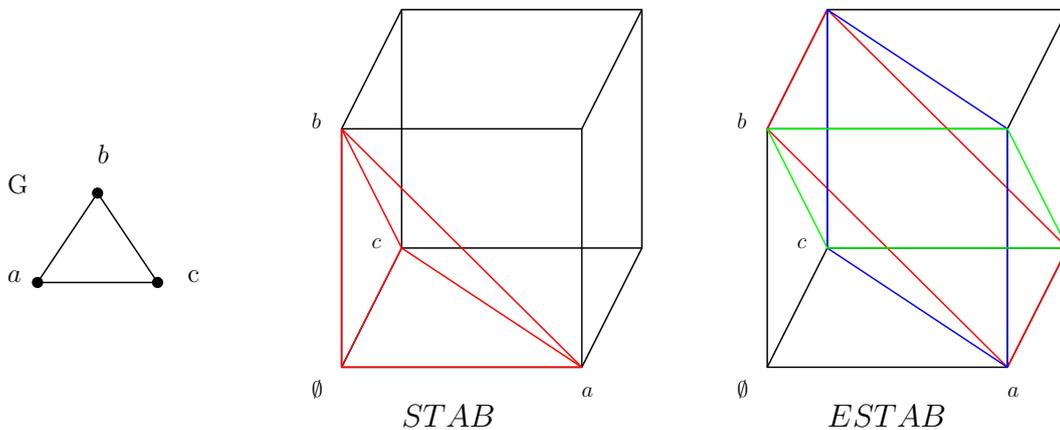


Abbildung 3: Ein Graph G und die Ploytope $\text{STAB}(G)$ und $\text{ESTAB}(G)$. Letzteres ist von \emptyset weg durch die rote, grüne und blaue Ebene beschränkt.

Die Ungleichungen (S_1) und (S_2) reichen also im allemeinen noch nicht als H -Beschreibung, ESTAB ist zu groß. Daher interessieren wir uns für weitere Ungleichungen, die von allen unabhängigen Mengen erfüllt werden:

$$(S_3) \quad \sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C| - 1}{2} \quad \forall C \text{ ungerader Kreis} \quad (\text{Kreisungleichung})$$

$$(S_4) \quad \sum_{i \in Q} x_i \leq 1 \quad \forall Q \text{ Clique} \quad (\text{Cliquenungleichung})$$

Definition 27.6 Das durch (S_1) und (S_4) definierte Polytop nennen wir QSTAB .

Bemerkung. Das durch S_1, S_2 und S_3 definierte Polytop heißt CSTAB . Die Kantenungleichungen S_2 sind in S_4 enthalten. Also liegen QSTAB und CSTAB zwischen STAB und ESTAB .

27.2 Gewichtete und fraktionale Graphenparameter

Definition 27.7 Es sei $w : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine Gewichtsfunktion. Nun wollen wir analog zur Färbungszahl $\chi(G)$ mit unabhängigen Mengen I überdecken, allerdings so, dass jeder Knoten v in genau $w(v)$ unabhängigen Mengen liegt. Die minimal benötigte Anzahl an unabhängigen Mengen ist die gewichtete chromatische Zahl $\chi(G, w)$. Als Formel:

$$\chi(G, w) = \min \left(\sum_{I \text{ unabh.}} a_I : \sum_{I \text{ unabh.}: v \in I} a_I = w(v) \quad \forall v \in V, a_I \in \mathbb{N} \right)$$

Die gewichtete Cliquenzahl $\omega(G, w)$ ist dagegen das maximale Gewicht einer Clique, also

$$\omega(G, w) = \max_{Q \text{ Clique}} \sum_{v \in Q} w(v).$$

Bemerkung. Nach Definition ist dann $\chi(G) = \chi(G, \mathbf{1})$. Man sieht weiterhin leicht, dass $\chi(G, w) \geq \omega(G, w)$.

Definition 27.8 Eine b -Färbung ist eine Gewichtung $(a_I)_I$ der unabhängigen Mengen mit $\sum_{I:i \in I} a_I = b$ für alle Knoten i , d.h. jeder Knoten wird b -fach überdeckt. Man schreibt $\chi(G, b) := \chi(G, b\mathbf{1})$. Die fraktionale chromatische Zahl wird definiert als:

$$\chi_f(G) := \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\chi(G, b)}{b}.$$

Bemerkung. Da $\omega(G, b\mathbf{1}) = b \cdot \omega(G)$, ist $\omega(G) \leq \chi_f(G)$.

Da weiterhin $\chi(G, a+b) \leq \chi(G, a) + \chi(G, b)$ gilt, folgt aus Feketes Lemma, dass $\chi_f(G)$ wohldefiniert ist, und $\omega(G) \leq \chi_f(G) \leq \chi(G)$.

Beispiel. $G = C_5$: Es ist $\chi(C_5, 1) = \chi(C_5) = 3$, $\chi(C_5, 2) = 5$ und $\chi(C_5, 3) = 8$. Also fällt die Folge $\frac{\chi(G, b)}{b}$ nicht immer monoton und da $\chi_f(C_5) = \frac{5}{2}$ ist $\omega(C_5) < \chi_f(C_5) < \chi(C_5)$.

Definition 27.9 Für $w : V \rightarrow \mathbb{N}$ definieren wir wG als den Graphen in dem es zu jedem Knoten v eine Clique Q_v mit $|Q_v| = w_v$ gibt und zusätzlich für $(u, v) \in E$ alle Kanten zwischen Knoten aus Q_u und Q_v existieren. Man sagt: der Graph wG entsteht aus G durch w -fache Knotenmultiplikation.

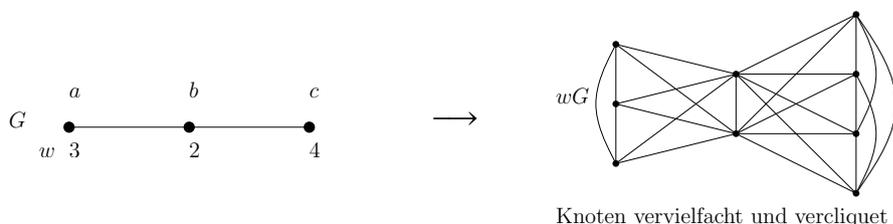


Abbildung 4: Ein Beispiel für Knotenmultiplikation.

Lemma 27.10 $\chi(G, w) = \chi(wG)$ und $\omega(G, w) = \omega(wG)$.

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe.

27.3 Eine weitere Charakterisierung von Perfektheit

Satz 27.11 Äquivalent ist:

- | | |
|--|--|
| (1) G ist ω -perfekt | (4) G ist α -perfekt |
| (2) $\chi(G, w) = \omega(G, w) \quad \forall w : V \rightarrow \mathbb{N}$ | (5) $\theta(G, w) = \alpha(G, w) \quad \forall w : V \rightarrow \mathbb{N}$ |
| (3) $\text{STAB}(G) = \text{QSTAB}(G)$ | (6) $\text{STAB}(\bar{G}) = \text{QSTAB}(\bar{G})$ |

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus Lemma 27.10 zusammen mit dem wichtigen Lemma 27.12 das wir gleich beweisen werden. Wir zeigen nur: (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4), denn aus diesen beiden Implikationen für den Komplementärgraphen \bar{G} folgen die Implikationen (4) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1) für G .

Lemma 27.12 Wenn G perfekt ist, dann gilt für jeden Knoten v , dass der Graph G' , der aus G durch Verdopplung von v entsteht, ebenfalls perfekt ist.

Beweis. Wir verwenden Induktion nach der Anzahl der Knoten. Für kleine n ($n \leq 3$) ist die Sache klar: der kleinste nicht-perfekte Graph hat 5 Knoten. Für jeden echten Subgraphen von G' folgt die Perfektheit aus der Induktionsannahme. Es bleibt also nur zu zeigen, dass $\omega(G') = \chi(G')$. Dafür definieren wir $\omega = \omega(G)$ und unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: v ist in einer ω -Clique von G enthalten. Das bedeutet $\omega(G') = \omega(G) + 1$. In diesem Fall können wir eine optimale Färbung von G nehmen und das Double von v mit einer zusätzlichen Farbe färben. So erhalten wir $\omega(G') = \chi(G')$.

Fall 2: v ist in keiner ω -Clique von G . Seien S_1, \dots, S_ω die Farbklassen einer optimalen Färbung von G mit $|S_\omega| \geq 2$. Dann ist $\omega(G_{[V-S_\omega+v]}) = \omega - 1$ und nach Induktionsvoraussetzung auch $\chi(G_{[V-S_\omega+v]}) = \omega - 1$. Sei nun $T_1 \dots T_{\omega-1}$ eine optimale Färbung von $G_{[V-S_\omega+v]}$. Dann ist $T_1, \dots, T_{\omega-1}, S_\omega$ eine legale Färbung von G' mit $\omega(G')$ Farben. \square

Nun zum eigentlichen Beweis von Satz 27.11.

(1) \Rightarrow (3): Die Ecken von QSTAB sind rational. Die Ecken sind durch Gleichungen mit ganzzahlige Koeffizienten definiert (um eine Ecke des n dimensionalen Polytops zu beschreiben benötigt man höchstens n dieser Gleichungen, obwohl die Gesamtzahl der Gleichungen exponentiell in n sein kann). Lösung der Eckengleichungen mit Gauß-Elimination \Rightarrow Lösung ist in \mathbb{Q}^n . Also gilt:

- Wenn für alle rationalen Punkte aus QSTAB gilt, dass sie auch in STAB sind dann gilt $\text{QSTAB} \subseteq \text{STAB}$ und also $\text{QSTAB} = \text{STAB}$.

Sei x ein Punkt in $\mathbb{Q}^V \cap \text{QSTAB}(G)$. Indem wir mit N , dem kgV der Nenner, multiplizieren bekommen wir ein $w = Nx \in \mathbb{Z}^n$. Wegen der Positivitätsungleichungen ist dieser Punkt w in \mathbb{N}^n .

Betrachte nun wG , den Graphen der durch Knotenmultiplikation mit w aus G entsteht. Sei \tilde{Q} eine maximale Clique in wG und Q die zugehörige Clique in G . Es gilt: $\omega(wG) = |\tilde{Q}| = \sum_{v \in \tilde{Q}} w(v) = Nx^T \cdot \mathbf{1}_Q \leq N$, weil aus $x \in \text{QSTAB}$ folgt, dass $x^T \cdot \mathbf{1}_Q \leq 1$.

Wegen Lemma 27.12 ist wG perfekt. Also gibt es eine Färbung $\tilde{S}_1 \dots \tilde{S}_N$. Sei S_i die zu \tilde{S}_1 gehörige unabhängige Menge in G . In $S_1 \dots S_N$ kommt v gerade $w(v)$ -fach vor. Daher gilt: $\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{S_i} = w$ und $x = \frac{1}{N}w = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \mathbf{1}_{S_i}$. Damit ist x eine Konvexkombination von Vektoren aus $\text{STAB}(G)$ und also selbst in $\text{STAB}(G)$. Das wollten wir zeigen.

(3) \Rightarrow (4): Zu zeigen ist, dass aus $\text{STAB}(G) = \text{QSTAB}(G)$ die α -Perfektheit von G folgt, also für alle $H = G[W]$ gilt: $\alpha(H) = \Theta(H)$. Weil $\text{STAB}(G) \cap \mathbb{R}^{V_H} = \text{STAB}(H)$ und ebenso $\text{QSTAB}(G) \cap \mathbb{R}^{V_H} = \text{QSTAB}(H)$ gilt, genügt es $\alpha(G) = \Theta(G)$ aus $\text{STAB}(G) = \text{QSTAB}(G)$ zu folgern. Wir verwenden hierfür Induktion nach α .

Aus der Definition von $\text{STAB}(G)$ und $\alpha = \alpha(G)$ folgt, dass $F = \text{STAB}(G) \cap \{x : x^T \mathbf{1} = \alpha\}$ eine nichtleere Seite von $\text{STAB}(G)$ ist. Als Seite von $\text{QSTAB}(G)$ kann F durch eine Cliquenungleichung beschrieben werden, d.h. es gibt eine Clique Q von G , so dass für alle $p \in F$ gilt $p^T \mathbf{1}_Q = 1$. Für alle unabhängigen Mengen S mit $|S| = \alpha$ gilt $\mathbf{1}_S \in F$ also $\mathbf{1}_S^T \cdot \mathbf{1}_Q = 1$ und $|S \cap Q| = 1$.

Das bedeutet nun aber $\alpha(G-Q) = \alpha-1$. Auf $G-Q$ können wir die Induktionsannahme anwenden. Also ist $G-Q$ α -perfekt, so dass eine Cliquenzerlegung $Q_1 \dots Q_{\alpha-1}$ von $G-Q$ existiert. Damit ist aber $Q_1 \dots Q_{\alpha-1} Q$ eine Cliquenzerlegung von G in $\alpha(G)$ Cliquen, d.h. $\alpha(G) = \Theta(G)$. □

Optimieren über STAB und die Lovász-Ecke

Ein Polytop P ist eine konvexe Ecke, wenn $P \subseteq \mathbb{R}_+^N$ (d.h. P liegt im positiven “Quadranten”) und $y \in P$ dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $0 \leq x \leq y$ (koordinatenweise), dass auch x in P ist.

- STAB und QSTAB sind konvexe Ecken.

Der *Antiblocker* einer konvexen Ecke P ist $ABL(P) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : y^T x \leq 1 \text{ für alle } y \in P\}$. Der Antiblocker einer konvexen Ecke ist selbst wieder eine konvexe Ecke.

- $ABL(\text{STAB}(G)) = \{x : \mathbb{1}_I^T x \leq 1 \text{ für alle unabhängigen Mengen } I \text{ in } G\}$
 $= \{x : \mathbb{1}_Q^T x \leq 1 \text{ für alle Cliques } Q \text{ in } \bar{G}\}$
 $= \text{QSTAB}(\bar{G})$.

Für eine konvexe Ecke P gilt: Optimieren über P und $ABL(P)$ ist polynomiell äquivalent. Optimieren über $\text{STAB}(G)$ ist schwierig. Ein Spezialfall ist das NP-schwere Problem die Unabhängigkeitszahl eines Graphen zu berechnen. Folglich ist auch die Optimieren über $\text{QSTAB}(G)$ schwierig. Lovász fand hier eine erstaunliche Abhilfe, die *Lovász-Ecke* $\text{TH}(G)$. Hier sind einige Tatsachen:

- $\text{STAB}(G) \subseteq \text{TH}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G)$.
- Optimieren über $\text{TH}(G)$ ist polynomiell (semidefinite Programmierung).
- Daraus folgt: Optimieren über $\text{STAB}(G)$ ist für perfekte Graphen polynomiell.

Wir werden diese Theorie hier nicht einholen können, aber wenigstens die Definition der *Lovász-Ecke* $\text{TH}(G)$ wollen wir uns ansehen.

Eine *Orthogonale Darstellung* von G ordnet jedem Knoten i einen Vektor $v_i \in \mathbb{R}_+^N$ zu (N darf frei gewählt werden), so dass $\|v_i\| = 1$ für alle Knoten i und für jede Nichtkante $ij \notin E_G$ gilt: $v_i^T v_j = 0$.

Beispiel: Sei $\phi : V \rightarrow [k]$ eine Färbung von \bar{G} und $u_1 \dots u_k$ eine Menge von paarweise orthogonalen, normierten Vektoren. Die Abbildung $i \mapsto u_{\phi(i)}$ ist eine orthogonale Darstellung (ONR) von G .

Zu einer ONR $\{v_i\}$ und einem Vektor $c \in \mathbb{R}^N$ mit $\|c\| = 1$ definieren wir einen Vektor $z = z(\{v_i\}, c)$ komponentenweise durch $z_i := (c^T v_i)^2$.

Lemma 28.1 Sei $x \in \text{STAB}(G)$ und $z = z(\{v_i\}, c)$ wie oben, dann gilt $z^T x \leq 1$.

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung: Sei $\{u_i\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^N . Jeder Vektor a kann dargestellt werden als $a = \sum_i (a^T u_i) u_i$ und für die Norm von a gilt: $\|a\|^2 = \sum_i (a^T u_i)^2$.

Um das Lemma zu beweisen genügt es $z^T \mathbf{1}_I \leq 1$ für alle unabhängigen Mengen I zu zeigen. Sei I also unabhängig. Die Vektoren $\{v_i\}_{i \in I}$ sind paarweise orthonormal. Diese Menge kann zu einer Orthonormalbasis $\{\hat{v}_i\}_{i \in V}$ erweitert werden. Nun gilt:

$$z^T \mathbf{1}_I = \sum_{i \in I} (c^T v_i)^2 \leq \sum_{i \in [N]} (c^T \hat{v}_i)^2 = \|c\|^2 = 1. \quad \square$$

Definition 28.2 $\text{TH}(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^n : z^T x \leq 1 \text{ für alle } z = z(\{v_i\}, c)\}$

Aus obigem Lemma folgt $\text{STAB}(G) \subseteq \text{TH}(G)$. Mit dem nächsten Lemma zeigen wir $\text{TH}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G)$.

Lemma 28.3 Sei $x \in \text{QSTAB}(G)$, dann gilt $x \in \text{TH}(G)$.

Beweis. Sei Q eine Clique und $\{c, \{v_i\}_{i \in V \setminus Q}\}$ eine beliebige Menge von paarweise orthogonalen, normierten Vektoren. Wir machen daraus eine ONR indem wir $v_j = c$ für alle $j \in Q$ wählen.

Sei nun $z = z(\{v_i\}, c)$ (unsere ONB, unser c). Für jeden Vektor x aus $\text{TH}(G)$ gilt: $z^T x \leq 1$. Wie wir gleich sehen werden, ist $z = \mathbf{1}_Q$, so dass alle x aus $\text{TH}(G)$ der Cliqueungleichung $\mathbf{1}_Q^T x \leq 1$ genügen. Da dieses Argument für jede Clique durchgeführt werden kann ist $\text{TH}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G)$.

Die Koeffizienten von z :

$$z_i = (c^T v_i)^2 = \begin{cases} 1 & i \in Q \\ 0 & i \notin Q. \end{cases} \quad \square$$

Baumzerlegungen und Baumweite

In der 29. und 30. Vorlesung haben wir uns ausgiebig mit Baumzerlegungen und der darüber definierten Baumweite beschäftigt.

Definition 29.1 Eine Baumzerlegung von G ist ein Paar $(T, \{B_t\}_{t \in V_T})$, mit den folgenden Eigenschaften:

- T ist ein Baum;
- $B_t \subseteq V_G$ für alle $t \in V_T$;
- für jede Kante $(u, v) \in E_G$ gibt es ein $t \in T$ mit $u, v \in B_t$;
- $B^{-1}(v) = \{t \in V_T \mid v \in B_t\}$ induziert für jedes $v \in V$ einen zusammenhängenden Teilbaum von T .

Die Mengen B_t werden die *Beutel* oder *Taschen* der Baumzerlegung genannt. Die letzte Bedingung ist äquivalent zu folgender Bedingung:

- Für drei Baumknoten u, v und w aus T , sodass v auf dem Pfad von u nach w in T liegt, gilt: $B_u \cap B_w \subseteq B_v$.

Wir wollen uns nun beispielhaft Baumzerlegungen eines Graphen ansehen. Abbildung 1 zeigt drei verschiedene Baumzerlegungen des C_6 .

Bemerkung. Jeder Graph lässt sich als Baum mit nur einem einzigen Beutel darstellen, der alle Knoten des Graphen enthält. Dies sichert zumindest die Existenz.

Definition 29.2 Die *Weite* einer Baumzerlegung $(T, \{B_t\}_{t \in V_T})$ eines ist $\max(|B_t|) - 1$, also die Größe des größten Beutels der Baumzerlegung minus eins. Die *Baumweite* von G ist die minimale Weite einer Baumzerlegung von G und wird mit $\text{tw}(G)$ bezeichnet.

Die Subtraktion von 1 von der maximalen Beutelgröße ist dadurch motiviert, dass die Baumweite von Bäume 1 sein soll.

Lemma 29.3 Ist H ein Teilgraph von G , dann gilt $\text{tw}(H) \leq \text{tw}(G)$.

Beweis. Sei $H = (W, F)$, $G = (V, E)$ und τ eine Baumzerlegung von G , die die Baumweite realisiert. Indem wir aus den Beuteln von τ alle Knoten aus $V \setminus W$ löschen erhalten wir eine Baumzerlegung von $G[W]$, das ist zugleich eine Baumzerlegung von H . \square

Das folgende Lemma gibt uns eine einfache untere Schranke an die Baumweite beliebiger Graphen:

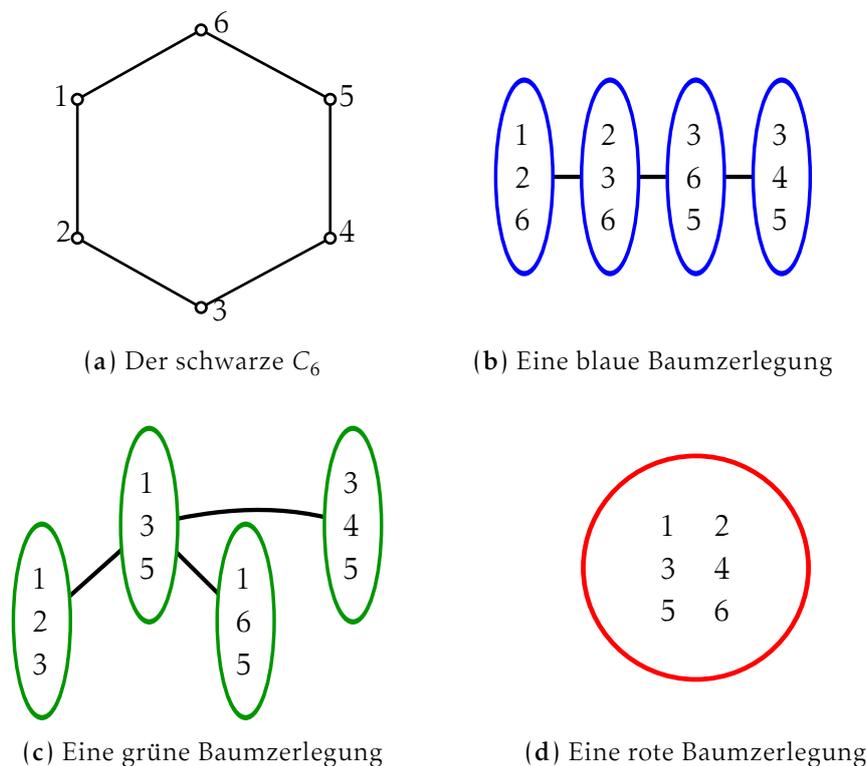


Abbildung 1: Der C_6 und 3 verschiedene Baumzerlegungen des C_6 .

Lemma 29.4 Für beliebige Graphen G gilt: $\text{tw}(G) \geq \omega(G) - 1$.

Beweis. Teilbäume als Teilmengen eines Baumes erfüllen die Helly-Eigenschaft. Daraus folgt, dass jede Clique Q aus G vollständig in einem Beutel V_t einer Baumzerlegung von G enthalten sein muss: Da für je zwei beliebige Knoten u und v aus Q die Kante uv in E ist, existiert ein Beutel, der u und v enthält, id est der Schnitt der Teilbäume $B^{-1}(v)$ und $B^{-1}(u)$ ist nicht leer. Mit der Helly Eigenschaft folgt, dass $\bigcap_{v \in Q} B^{-1}(v) \neq \emptyset$. Dies impliziert, dass es einen Beutel B_{v^*} mit $Q \subseteq B_{v^*}$ gibt, so dass die Baumweite mindestens $|Q| - 1$ ist. Dies gilt für jede Baumzerlegung, folglich ist $\text{tw}(G) \geq \omega(G) - 1$. \square

29.1 Baumzerlegungen und chordale Graphen

In der 26. Vorlesung haben wir folgende Eigenschaft bewiesen: Ein Graph G ist genau dann chordal, wenn er ein Baumgraph ist, also eine Darstellung als Durchschnittsgraph von Teilbäumen eines Baumes besitzt. Diese Darstellung $(T, \{T_v\})_{v \in V_G}$ liefert eine Baumzerlegung durch $B_t := T^{-1}(t) = \{v \in V_G | t \in T_v\}$.

Also gilt für alle chordale Graphen:

$$\text{tw}(G) = \omega(G) - 1.$$

Mit dieser Vorüberlegung bekommen wir folgende Proposition:

Proposition 29.5 Jede Baumzerlegung τ von G liefert einen chordalen Graphen G^τ , der G als Subgraphen enthält. Außerdem gilt: $\text{tw}(G) \leq \text{tw}(G^\tau) = \omega(G^\tau) - 1$.

Beweis. Wie definieren G^τ als Vereinigung der durch die Beutel der Baumzerlegung definierten Cliques, d.h. wir verwenden für G^τ sämtliche durch die Baumzerlegung ermöglichten Kanten. □

Beispiel. Wir betrachten die chordalen Erweiterungen des C_6 , die durch Hinzufügen sämtlicher durch die Baumzerlegung ermöglichten Kanten entsteht. Eine Kante uv ist durch eine Baumzerlegung gegeben, falls u und v zusammen in einem Beutel sind. Siehe dazu auch Abbildung 2. Die Erweiterung der roten Zerlegung ist der K_6 .

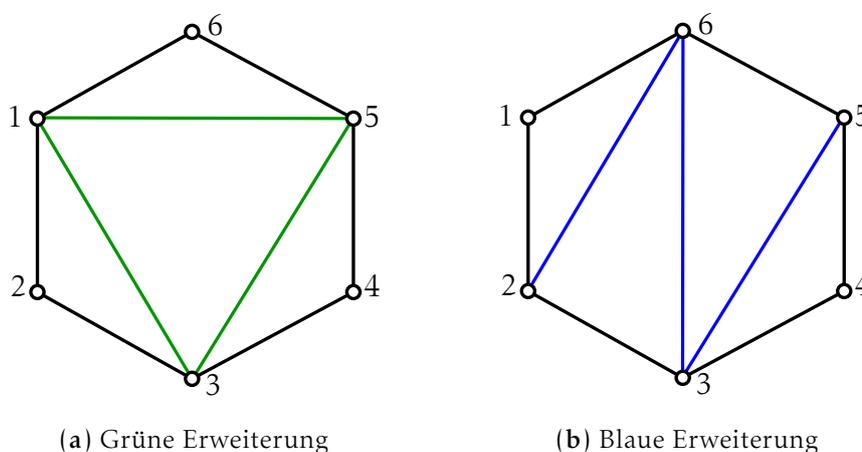


Abbildung 2: Der C_6 und 2 verschiedene durch Baumzerlegungen induzierte chordale Erweiterungen des C_6 (zu den Zerlegungen aus Abbildung 1).

Als Folgerung erhalten wir eine alternative Charakterisierung der Baumweite:

Korollar 29.6 Die Baumweite eines Graphen G ist durch folgende Formel gegeben:

$$\text{tw}(G) = \min_{G^\Delta \text{ chordale Erwe. von } G} \max_{Q \text{ Clique in } G^\Delta} (|Q| - 1).$$

29.2 Charakterisierung der Baumweite als Spielparameter

Mit dem Spiel *Cops and Robber* wollen wir uns eine weitere Charakterisierung der Baumweite anschauen. Zunächst wird das Spiel beschrieben.

Die *Spieler* des Spiels bestehen aus einem Robber und einer Menge von k Cops. Der Robber, wie der Name schon suggeriert, hat eine vermeintliche Straftat begangen, weshalb die Cops ihres Amtes walten und versuchen, den Robber zu fangen. Gespielt wird auf einem Graphen; der Robber kann sich beliebig schnell von Knoten zu Knoten

über die Kanten bewegen. Die Cops sind nicht ganz so beweglich und können nur einzeln von einem beliebigen Knoten zu einem anderen beliebigen Knoten bewegt werden. Dazu steht ihnen ein Hubschrauber zur Verfügung.

Außerdem wird mit vollständiger Information gespielt, insbesondere weiß der Robber, wo der Hubschrauber landen wird, wenn ein Cop eingestiegen ist.

Der Robber ist gefangen, wenn er sich mit einem Cop zusammen auf einem Knoten befindet.

Frage: Wie viele Cops sind notwendig, um den Robber auf einem gegebenen Graphen zu fangen?

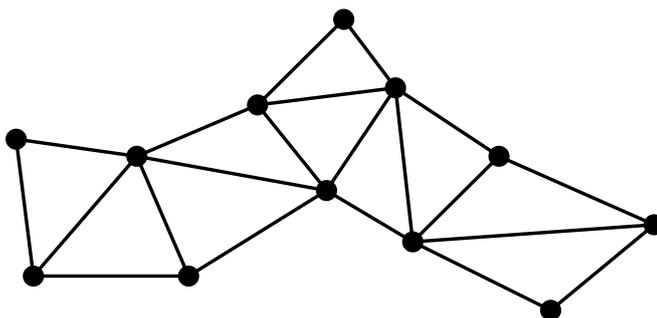


Abbildung 3: Auf diesem Graphen reichen 3 Cops, um den Robber zu fangen. Aber wie können sie das schaffen?

Seymour und Thomas haben diesbezüglich folgendes positives Resultat gefunden:

Theorem 29.7 Für einen Graphen G ist äquivalent:

$$\text{tw}(G) \leq k - 1 \Leftrightarrow k \text{ Cops können den Robber in } G \text{ fangen.}$$

Beweis. Wir schauen uns nur an, wie man aus einer Baumzerlegung eine Gewinnstrategie für k Cops konstruieren kann. Die andere Richtung, wie wir aus einer Gewinnstrategie eine Baumzerlegung bekommen, behandeln wir hier nicht.

Sei nun also G ein Graph mit Baumweite $\text{tw}(G) = k - 1$ und $(T, \{B_t\}_{t \in V_T})$ eine passende Baumzerlegung, d. h. mit Beutelgröße höchstens k . Sei $(t, t') \in E(T)$ eine Kante der Baumzerlegung. Wir können annehmen, dass zwischen B_t und $B_{t'}$ keine Inklusion gilt. Andernfalls können wir die Kante (t, t') zusammenziehen. Die Baumzerlegung mit der kontrahierten Kante stellt den gleichen Graphen dar.

Daraus folgt also: $|B_t \cap B_{t'}| \leq k - 1$.

Behauptung. $S = B_t \cap B_{t'}$ ist ein Separator in G .

Beweis der Behauptung. Sei $u \in B_t \setminus S$ und $u' \in B_{t'} \setminus S$. Indirekt angenommen $G \setminus S$ sei zusammenhängend, dann gibt es einen Pfad $u = x_0, x_1, \dots, x_k = u'$ von u nach u' . Sei T_t die Zusammenhangskomponente von $T - (t, t')$ in der t liegt und x_i der letzte Knoten des Pfades der nur in Beuteln in T_t vorkommt (da x_0 die gewünschte Eigenschaft besitzt aber x_k nicht, finden wir x_i mit $i < k$). Weil (x_i, x_{i+1}) eine Kante ist, kommt x_{i+1} in einem Beutel aus T_t vor. Nach Wahl von x_i kommt x_{i+1} auch in einem Beutel vor

der nicht zu T_t gehört. Damit muss der Teilbaum von x_i aber die Kante (t, t') enthalten. Das bedeutet $x_i \in S$, ein Widerspruch, also ist S ein Separator. \triangle

Daraus können wir nun die Strategie für die Cops ableiten. Siehe dazu auch Abbildung 4. Wir nehmen nun noch zusätzlich an, dass alle Beutel die Größe k haben. Der allgemeine Fall leitet sich dann ab, indem beim Besetzen kleinerer Beutel mehrere Cops auf einen Knoten gestellt werden.

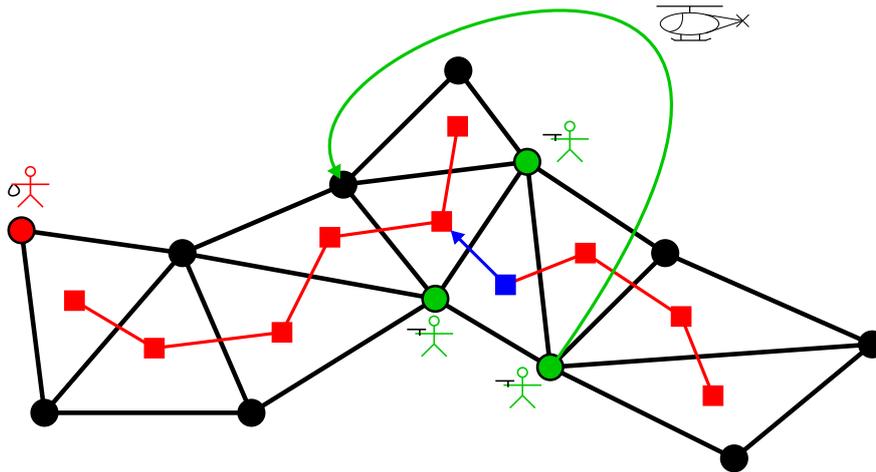


Abbildung 4: Ein exemplarischer Zug der Cops.

Phase 1: Besetze die Knoten aus einem beliebigen Beutel B_{t_0} . Dieser hat höchstens k Knoten, sodass k Cops ausreichen.

Phase i :

- Die Knoten aus $B_{t_{i-1}}$ sind mit Cops besetzt.
- Der Robber befindet sich in einem Teilbaum $T \setminus t_{i-1}$, der über die Kante (t_{i-1}, t) erreichbar ist. Setze $t_i = t$.
- Die Cops auf Knoten aus $B_{t_{i-1}} \cap B_t$ bleiben stehen, die übrigen Cops gehen auf die Knoten aus $B_t \setminus B_{t_{i-1}}$.

Insbesondere bleibt der Schnitt der beiden Beutel $B_{t_{i-1}}$ und B_t durchgehend besetzt. Nach der Beobachtung ist dieser Schnitt ein Separator in G , somit kann der Robber seinen Teilbaum nicht verlassen, wenn die Cops umstationiert werden. Außerdem wird der Teilbaum in jeder Phase kleiner. Irgendwann stehen die Cops daher gemeinsam mit dem Robber auf den zu einem Blatt B_{t^*} gehörigen Knoten von G . Damit wird der Robber nach endlich vielen Zügen der Cops gefangen. \square

Mit Hilfe von Satz 29.7 können wir zeigen, dass sogar die Baumweite planarer Graphen beliebig groß werden kann.

Proposition 29.8 Sei G_n der $n \times n$ -Gittergraph. Dann gilt:

$$n \geq \text{tw}(G_n) \geq n - 1.$$

Baumzerlegungen und Baumweite

30.1 Anwendungen der Baumweite

Viele schwierige Probleme lassen sich auf Graphen mit beschränkter Baumweite effizient lösen. Probleme, die man für einen bestimmten Parameter (hier die Baumweite) polynomiell lösen kann, nennt man auch *fixed parameter tractable* (FPT). Eine typische Technik für den Entwurf von FPT-Algorithmen ist die *dynamische Programmierung*. Im Folgenden schauen wir uns dazu ein Beispiel an.

Beispiel. 3-Färbbarkeit: Gegeben ist ein Graph G , Aufgabe ist es zu entscheiden ob $\chi(G) \leq 3$ gilt.

Im Allgemeinen ist dies ein NP-schweres Problem.

Sei G ein Graph mit $\text{tw}(G) \leq k - 1$ und einer entsprechenden Baumzerlegung der Beutelgröße höchstens k , $|B_t| \leq k \forall t \in T$. Sei $r \in V_T$. Wir wollen T als in r gewurzelten Baum betrachten. Dann gibt es zu jedem Knoten t von T einen Teilbaum T_t (dieser besteht aus t und allen Knoten die durch t von der Wurzel r getrennt werden). Wir definieren

$$V_t = \bigcup_{t' \in T_t} B_{t'} \quad \text{und} \quad G_t = G[V_t].$$

Beobachtung. $G_r = G$.

Weiter führen wir noch die folgenden zwei Notationen ein (Ext wie extendable, also erweiterbar):

$$\begin{aligned} \text{Col}(t) &= \{f : B_t \rightarrow \{1, 2, 3\} \mid f \text{ zulässige 3-Färbung von } G[B_t]\} \\ \text{ExtCol}(t) &= \{f \in \text{Col}(t) \mid f \text{ lässt sich zu 3-Färbung von } G_t \text{ erweitern}\}. \end{aligned}$$

Die Mengen $\text{Col}(t)$ und $\text{ExtCol}(t)$ werden bottom-up berechnet, also von den Blättern hinauf zur Wurzel (in der Richtung des Pfeils in Abbildung 1). Für die Blätter von T gilt $B_t = V_t$ und somit auch $\text{ExtCol}(t) = \text{Col}(t)$. Die Menge $\text{Col}(t)$ kann durch vollständige Aufzählung in $O(3^k \cdot \binom{k}{2})$ Schritten berechnet werden: Es gibt 3^k Kandidatenfärbungen, die Zulässigkeit einer Färbung wird in $\binom{k}{2}$ Schritten getestet.

Sei nun t ein innerer Knoten mit s Kindern t_1, \dots, t_s . Dann können wir $\text{ExtCol}(t)$ rekursiv mit der folgenden Gleichung berechnen:

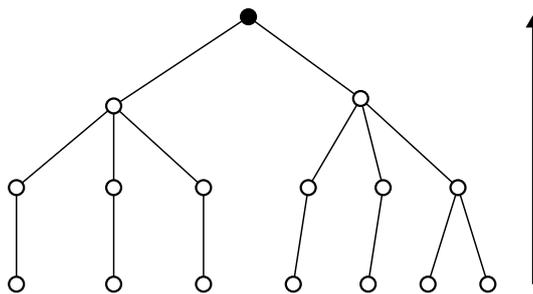


Abbildung 1: Eine gewurzelte Baumzerlegung (der schwarze Knoten ist die Wurzel).

$$\text{ExtCol}(t) = \left\{ f \in \text{Col}(t) \mid \forall i \in [s] \exists f_i \in \text{ExtCol}(t_i) : f|_{B_t \cap B_{t_i}} = f_i|_{B_t \cap B_{t_i}} \right\}.$$

Auch dies können wir mittels vollständiger Aufzählung tun und erhalten dafür einen Aufwand von $O(s \cdot 3^k \cdot 3^k \cdot k)$.

Somit erhalten wir einen Gesamtaufwand für den 3-Färbbarkeitstest von Graphen mit Baumweite höchstens k von

$$O(|V_T| \cdot 3^k \cdot \binom{k}{2} + |E_T| \cdot 3^{2k} \cdot k).$$

Da wir in Funktionen in der Konstante k ebenfalls als konstant auffassen, bleiben $|V_T|$ und $|E_T|$ als maßgebliche Größen übrig. Wir zeigen anschließend, dass wir annehmen dürfen, dass die Größe des Trägerbaumes der Baumzerlegung durch $n := |V_G|$ beschränkt ist. Also ist die Laufzeit des Färbbarkeitsalgorithmus $O(n)$. \square

Bemerkung. Für größere k ist dieser Algorithmus natürlich nur theoretisch schnell, obwohl seine asymptotische Laufzeit linear ist.

Beobachtung. Sei G ein Graph mit Baumzerlegung $(T, \{B_t\})$ und $(t, t') \in E(T)$ eine Kante von T mit $B_{t'} \subseteq B_t$. Dann existiert eine echt kleinere Baumzerlegung (durch Kontraktion der Kante (t, t')).

Motiviert durch diese Beobachtung stellen wir folgende Proposition auf:

Proposition 30.1 Sei $(T, \{B_t\})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G , sodass keine Kante (t, t') mit $B_{t'} \subseteq B_t$ existiert. Dann gilt: $|V_T| \leq |V_G|$.

Beweis. Wie in der Anwendung der Baumweite für den 3-Färbbarkeitstest betrachten wir T wieder als in $r \in V_T$ gewurzelt. Dann gilt: Ist ein Knoten $t \in V_T$ nicht der höchste (in T gewurzelt) Knoten eines Teilbaums $B^{-1}(v)$ für ein $v \in V_G$, so enthält der Knoten $t \in V_T$, der in T über t' liegt, alle Knoten, die in t enthalten sind, also $B_{t'} \subseteq B_t$. Dies ist ein Widerspruch zu Voraussetzung, dass es keine Kante (t, t') mit $B_{t'} \subseteq B_t$ in der Baumzerlegung gibt.

Somit gibt es zu jedem Knoten $t \in V_T$ ein $v \in V_G$, sodass t der höchste Knoten von $B^{-1}(v)$ in T mit Wurzel r ist. Da jeder Teilbaum $B^{-1}(v)$ nur einen höchsten Knoten

hat, ist folglich die Anzahl der Baumknoten $|V_T|$ höchstens die Anzahl der Knoten des Graphen $|V_G|$. \square

Bemerkung. Nicht alles ist einfach bei beschränkter Baumweite.

Beispiel. Die Berechnung kantendiskjunkter Wege. In einem Graphen G suchen wir paarweise kantendiskunkte Wege zwischen gegebenen Start-Ziel-Paaren $\{s_i, t_i\}$ mit $s_i, t_i \in V_G$ und $i = 1, \dots, r$. Dieses Problem ist NP-schwer, selbst wenn die Baumweite von G durch 3 beschränkt ist.

Ein paar Fakten zur Berechnung der Baumweite.

- Die Berechnung ist ein NP-schweres Problem.
- Für ein festes k ist das Problem $\text{tw}(G) \leq k$ in Linearzeit entscheidbar (allerdings mit riesigen von k abhängigen Konstanten).
- Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ derart, dass effizient eine Baumzerlegung der Weite höchstens $f(k)$ berechnet werden kann, wenn die Baumweite des Graphen höchstens k ist.
- Offen: Baumweite für planare Graphen berechnen.

Ein wichtiges Ergebnis über die Berechenbarkeit auf Graphen mit beschränkter Baumweite ist der folgende Satz von Courcelle, welchen wir hier ohne Beweis angeben.

Theorem 30.2 *Jedes Problem, das in MSOL (monadic second-order logic) beschreibbar ist, kann auf Graphen mit beschränkter Baumweite in Linearzeit gelöst werden.*

Beispiel. Eine Beschreibung von 3-Färbbarkeit in MSOL:

$$\exists R, G, B: \quad \left(\forall v \in V : (v \in R \vee v \in G \vee v \in B) \right) \wedge \\ \left(\forall (u, v) \in E : \neg(u \in R \wedge v \in R) \wedge \neg(u \in G \wedge v \in G) \wedge \neg(u \in B \wedge v \in B) \right).$$

30.2 Baumweite und Minoren

Definition 30.3 *Sei G ein Graph. Ein Graph H ist ein Minor von G , falls H aus G durch die drei Operationen Kantenkontraktion, Kantenlöschung und Knotenlöschung erzeugt werden kann. Siehe auch Abbildung 2.*

Beispiel.

- Minoren von Bäumen sind Wälder.
- Minoren von planaren Graphen sind planar.
- Jeder planare Graph ist Minor eines Gitters.
- Jeder Graph ist Minor eines bipartiten Graphen. Siehe dazu Abbildung 3.

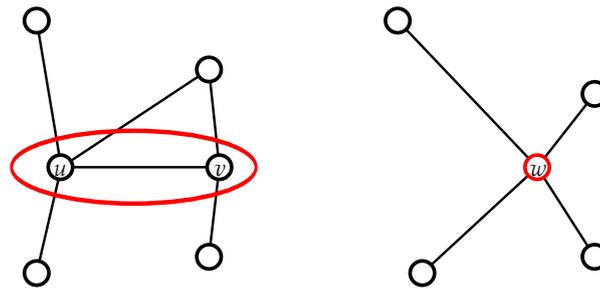


Abbildung 2: Hier wird die Kante (u, v) (links) zu einem Knoten w (rechts) kontrahiert. Entstehende Multikanten werden zu Einfachkanten reduziert.

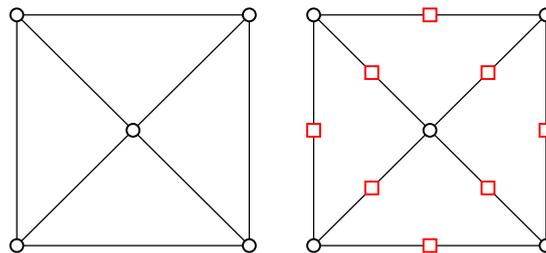


Abbildung 3: Der Graph G (links) ist Minor seiner bipartiten Unterteilung (rechts). Durch das Einfügen eines zusätzlichen Knotens auf jeder Kante bekommt jeder Kreis gerade Länge.

Proposition 30.4 $H = (W, F)$ ist Minor von $G = (V, E)$ (in Zeichen $H < G$) genau dann, wenn paarweise diskunkte Teilmengen $(V_w)_{w \in W}$, $V_w \subseteq V$ existieren, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $G[V_w]$ ist zusammenhängend für alle $w \in W$
- Für alle Kanten (w, w') in F ist $G[V_w \cup V_{w'}]$ zusammenhängend.

Beweis. Verbleibt dem Leser als Übung.

Definition 30.5 Eine Graphenklasse \mathcal{G} ist abgeschlossen unter Minoren (kurz: die Graphenklases ist MA), wenn für alle $G \in \mathcal{G}$ und jedes H mit $H < G$ auch $H \in \mathcal{G}$ gilt.

Beispiel.

- Wälder sind MA.
- Graphen mit Baumweite höchstens k sind MA.
- Planare Graphen sind MA.

30.3 Das Minorentheorem von Robertson und Seymour

Theorem 30.6 Wenn eine Graphenklasse \mathcal{G} MA ist, dann existiert eine endliche Menge H_1, \dots, H_s von Graphen, sodass $\mathcal{G} = \text{Ex}(H_1, \dots, H_s) = \{G \mid H_i \not< G \ \forall i = 1, \dots, s\}$ gilt. Mit Worten: \mathcal{G} wird durch eine endliche Menge von Obstruktionen charakterisiert.

Bemerkung. Die Minorrelation ist eine Ordnungsrelation.

Beispiel.

- Wälder: Der $K_3 = C_3$ ist die einzige Obstruktion.
- Graphen mit Baumweite höchstens k :
 - Für $k = 0$ haben wir als einzige Obstruktion den K_2 .
 - Für $k = 1$ haben wir als einzige Obstruktion den K_3 .
 - Für $k = 2$ haben wir als einzige Obstruktion den K_4 .
 - Für $k = 3$ gibt es 4 Obstruktionen: K_5 , $K_{2,2,2}$, Prisma über C_5 und die Möbiusleiter M_4 (siehe Abbildung 4).
- *Linklessly embeddable* Graphen, das sind die Graphen die eine Einbettung im 3-dimensionalen Raum besitzen so dass je zwei disjunkte Kreise getrennt werden können. Diese haben 7 Obstruktionen, nämlich die Petersen Familie. Diese besteht aus Graphen, die durch die Operationen $\Delta \rightarrow Y$ und $Y \rightarrow \Delta$ aus dem Petersen Graphen gewonnen werden können. Siehe dazu auch Abbildung 5.

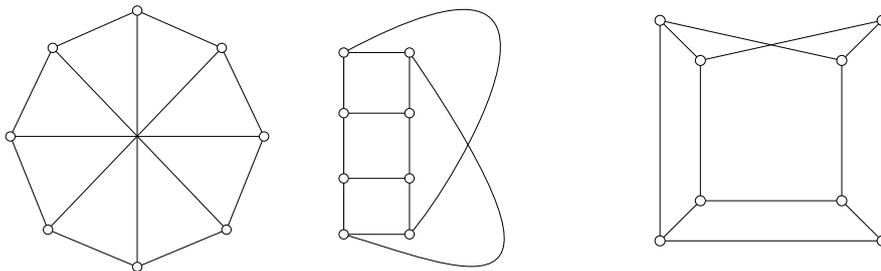


Abbildung 4: Drei Zeichnungen der Möbiusleiter M_4 .

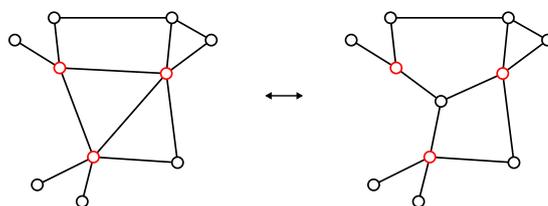


Abbildung 5: Die $\Delta \leftrightarrow Y$ Transformation.

Korollar 30.7 Wenn eine Graphenklasse \mathcal{G} MA ist, so existiert ein polynomieller Erkennungsalgorithmus für \mathcal{G} , das heißt, dass für einen beliebigen Graphen G polynomiell entschieden werden kann, ob $G \in \mathcal{G}$ gilt.

Beweis. Nach dem Minorentheorem von Robertson und Seymour existiert eine endliche Liste $\mathcal{H} = H_1, \dots, H_s$ von Obstruktionen von \mathcal{G} . Teste für jede Obstruktion H_i ob $H_i < G$ gilt. Dieser Test ist für festes H polynomiell. \square

Bemerkung. Dies ist ein reiner Existenzbeweis für einen solchen Algorithmus. Um den Algorithmus konkret beschreiben zu können benötigt man die Obstruktionsmenge. Die Berechnung dieser Menge ist zwar ein endliches Problem, in der Praxis aber zumeist völlig hoffnungslos (siehe Beispiele weiter oben).

Nun wollen wir noch einen weiteren Satz von Robertson und Seymour angeben:

Theorem 30.8 *Die Baumweite der Graphen in $Ex(H)$ (der Graphen die H nicht als Minor besitzen) ist genau dann beschränkt, wenn H planar ist.*

Beweis. (Wir zeigen hier nur, dass aus der Beschränktheit die Planarität folgt).

Sei H nicht planar, dann ist das $n \times n$ -Gitter $G_n \in Ex(H)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Laut Proposition 29.8 gilt $tw(G_n) \geq n - 1$, daraus folgt, dass die Baumweite von $Ex(H)$ unbeschränkt ist, ein Widerspruch zur Voraussetzung an $Ex(H)$. \square

30.4 Wohlquasiordnungen

Der Beweis des Minorentheorems umfasst 20 Veröffentlichungen, welche (laut Wikipedia) zusammen circa 500 Seiten haben.

Eine wichtige Rolle im Beweis spielen Wohlquasiordnungen. Mit diesen wollen wir uns jetzt noch kurz beschäftigen.

Definition 30.9 *Eine Quasiordnung ist eine Menge zusammen mit einer binären Relation \leq , welche transitiv und reflexiv ist. (Im Unterschied zu einer Ordnung ist eine Quasiordnung nicht notwendigerweise antisymmetrisch.)*

Eine Wohlquasiordnung ist eine Quasiordnung mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass es zu jeder unendlichen Folge (a_1, a_2, a_3, \dots) Indizes $i < j$ gibt, sodass $a_i \leq a_j$ gilt.

Bemerkung. Das bedeutet, dass es weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche strikt absteigende Folge gibt.

Beispiel.

- \mathbb{N} ist eine Wohlquasiordnung.
- \mathbb{Z} ist keine Wohlquasiordnung.
- \mathbb{N}^k ist eine Wohlquasiordnung.
- Die Menge der Bäume mit der Teilgraph-Relation ist keine WQO. In Abbildung 6 ist eine unendliche Antikette von Bäumen dargestellt.
- Satz von Kruskal: Bäume mit topologischer Minor-Relation sind WQO. Topologisch heißt hier, dass an jeder Kontraktion ein Grad 2 Knoten beteiligt ist.

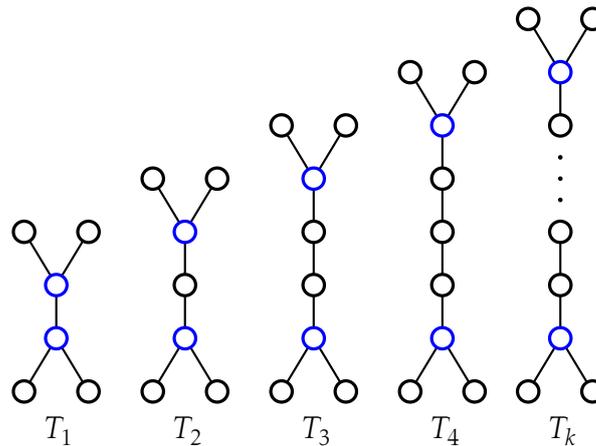


Abbildung 6: Eine unendliche Antikette $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Bäumen bezüglich der Teilgraphenrelation. Der Index k gibt an, wie viele Kanten der Pfad zwischen den beiden Grad 3-Knoten hat.

Wir geben noch einen Satz von Robertson und Seymour an, auch ohne Beweis.

Theorem 30.10 Für jedes k bilden die Graphen von Baumweite höchstens k mit der Minorenrelation eine Wohlquasiordnung.

Um wenigstens ein bisschen mit Wohlquasiordnungen zu arbeiten beweisen wir eine Proposition:

Proposition 30.11 Sei \mathcal{B} die Menge der vollen binären Bäume und $<$ die Teilgraphen-Relation. Dann ist $(\mathcal{B}, <)$ eine Wohlquasiordnung.

Beweis. Wir nehmen an, dass eine Folge existiert, die der Definition der Wohlquasiordnung widerspricht. So eine Folge nennen wir *böse*. Wenn (T_1, T_2, T_3, \dots) eine böse Folge ist, dann gilt $T_i \not\leq T_j$ für alle $i < j$. Unter allen bösen Folgen wählen wir eine Folge $A = (T_1, T_2, T_3, \dots)$ für die $|A| = (|T_1|, |T_2|, |T_3|, \dots)$ lexikographisch minimal ist.

Nun betrachten wir die Folgen $A^L = (T_1^L, T_2^L, T_3^L, \dots)$ und $A^R = (T_1^R, T_2^R, T_3^R, \dots)$, wobei T_j^L und T_j^R der linke und der rechte Teilbaum der Wurzel von T_j sind.

Behauptung 1. Die Mengen $\{T_i^L : i \in \mathbb{N}\}$ und $\{T_i^R : i \in \mathbb{N}\}$ sind Wohlquasiordnungen mit der Teilgraphen-Relation.

Beweis. Angenommen es gibt eine böse Folge B_0 in $\{T_i^L : i \in \mathbb{N}\}$. Da jede unendliche Teilfolge einer bösen Folge ebenfalls böse ist gibt es eine böse Teilfolge B von B_0 mit wachsenden Indizes: $B = (T_{\alpha_1}^L, T_{\alpha_2}^L, T_{\alpha_3}^L, \dots)$ mit $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ für alle i .

Die Folge $C = (T_1, T_2, \dots, T_{\alpha_1-1}, T_{\alpha_1}^L, T_{\alpha_2}^L, \dots)$ ist lexikographisch kleiner als A , einfach weil $|T_{\alpha_1}^L| < |T_{\alpha_1}|$. Die Wahl von A impliziert, dass C nicht böse ist. Da der vordere Teil und der hintere Teil je aus einer bösen Folge stammen gibt es eine \leq -Vergleichbarkeit zwischen einem vorderen und einem hinteren Element, also gibt es i, j mit $i < \alpha_1 \leq j$ und $T_i \leq T_j^L$. Mit $T_j^L < T_j$ und Transitivität bekommen wir mit $T_i < T_j$ einen Widerspruch dagegen, dass A böse ist. \triangle

Behauptung 2. Die Menge $\{(T_i^L, T_i^R) : i \in \mathbb{N}\}$ ist eine Wohlquasiordnung mit der Produktordnung basierend auf den Ordnungen aus Behauptung 1.

Beweis. Angenommen es gibt eine böse Folge $D = ((T_{\beta_1}^L, T_{\beta_1}^R)(T_{\beta_2}^L, T_{\beta_2}^R), \dots)$. Das bedeutet, dass $T_{\beta_i}^L \not\leq T_{\beta_j}^L$ oder $T_{\beta_i}^R \not\leq T_{\beta_j}^R$ für alle $i < j$ gilt. Für jedes i sei a_i die Länge der längsten bösen Teilfolge in den linken Komponenten deren letztes Element $T_{\beta_i}^L$ ist und b_i die Länge der längsten bösen Teilfolge in den rechten Komponenten deren letztes Element $T_{\beta_i}^R$ ist. Für $i < j$ gilt nach dem Obigen $a_i < a_j$ oder $b_i < b_j$. Damit sind die Paare alle verschieden (a_i, b_i) und wir bekommen in zumindest einer der Komponenten eine unendliche monoton wachsende Teilfolge. Diese unendliche Teilfolge entspricht nun aber einer unendlichen bösen Teilfolge in $(T_{\beta_1}^L, T_{\beta_2}^L, \dots)$ oder $(T_{\beta_1}^R, T_{\beta_2}^R, \dots)$. Das im Widerspruch zu den Erkenntnissen aus Behauptung 1. \triangle

Nun betrachten wir die Folge $F = ((T_1^L, T_1^R)(T_2^L, T_2^R), \dots)$. Nach Behauptung 2 ist F nicht böse, d.h., es gibt $i < j$ mit $(T_i^L, T_i^R) \leq (T_j^L, T_j^R)$. Das bedeutet aber, dass $T_i \leq T_j$ also ist A nicht böse, ein Widerspruch. \square

Planare Graphen

31.1 Zeichnungen, Kreuzungen und Jordanscher Kurvensatz

Definition 31.1 Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, falls es eine kreuzungsfreie Zeichnung von G in der Ebene gibt.

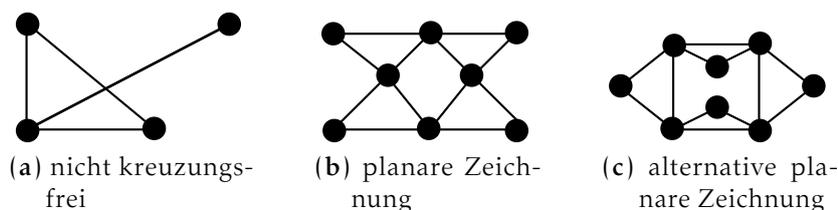


Abbildung 1: Verschiedene planare Graphen.

Satz 31.2 (Jordanscher Kurvensatz)

Eine einfache geschlossene Kurve C in der Ebene zerlegt diese so in zwei Teile (einer beschränkt / einer unbeschränkt), dass C der Rand jedes Teils ist.

31.2 K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar

Proposition 31.3 K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Beweis. (K_5) Sei C ein 5-Kreis in einer kreuzungsfreien Zeichnung des K_5 . C ist offensichtlich eine geschlossene Kurve. Jede der übrigen 5 Kanten von K_5 ist eine Sehne an C . Nach dem Jordanschen Kurvensatz muss eine Sehne, die keine Kreuzung mit C hat, entweder komplett im Inneren oder im Äußeren von C verlaufen. Innen und außen können jedoch je höchstens 2 Sehnen kreuzungsfrei verlaufen. Siehe Abbildung 2a

Beweis. ($K_{3,3}$) Sei C ein 6-Kreis in einer kreuzungsfreien Zeichnung des $K_{3,3}$. Jede der 3 verbleibenden Kanten in $K_{3,3}$ ist dann eine Diagonale. Innen und außen kann je nur eine Diagonale kreuzungsfrei gezeichnet werden. Siehe Abbildung 2b. \square

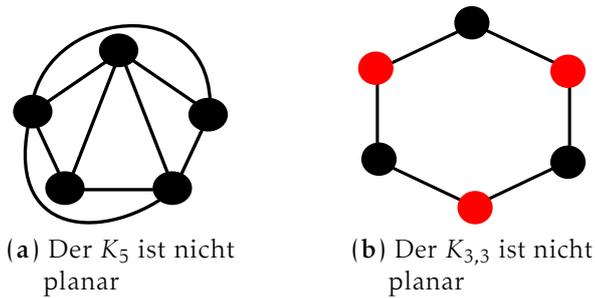


Abbildung 2: Die wichtigsten nicht-planaren Graphen.

31.3 Duale Graphen

Ein planar gezeichneter Graph hat Flächen (Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus (\text{Zeichnung})$).

Definition 31.4 Der Dualgraph $G^* = (V^*, E^*)$ von $G = (V, E)$ ist der Graph mit:

- $V^* =$ Menge der Flächen von G .
- $E^* =$ Menge der dualen Kanten. (Seien f_1, f_2 die Flächen auf den beiden Seiten der Kante e . Dann definieren wir: $e^* = (f_1, f_2)$ und $E^* = \{e^* : e \in E\}$).

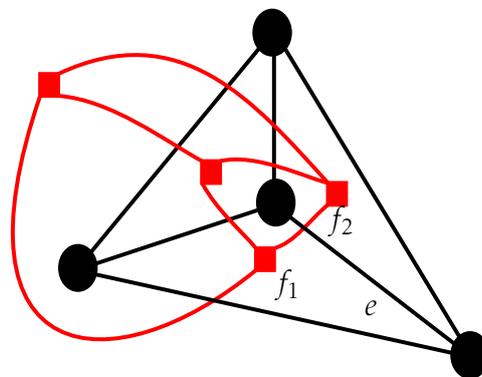


Abbildung 3: Ein planarer Graph und sein Dualgraph.

Beobachtung.

- Ein Dualgraph ist immer zusammenhängend.
- G^* kann Schleifen und Mehrfachkanten besitzen.
 - Schleife in $G^* \iff$ Brücke in G .
 - Mehrfachkante in $G^* \iff$ Kantenzusammenhang von $G \leq 2$.
- G^* ist von der Zeichnung abhängig.

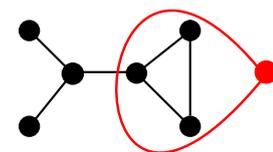


Abb. 4: Eine Schleife im Dualgraphen.

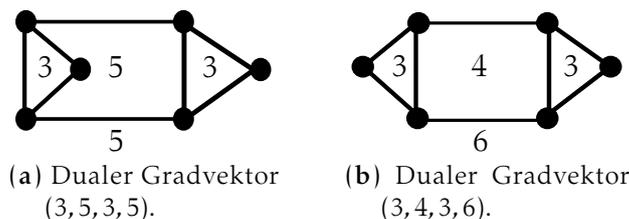


Abbildung 5: Zeichnungen von G mit verschiedenen Dualgraphen.

Satz 31.5 Wenn G 3-zusammenhängend ist, dann ist G^* eindeutig bestimmt (also unabhängig von der Zeichnung). Außerdem gilt dann auch, dass G^* ein einfacher Graph ist und $G^{**} = G$.

Dualität von Kreisen und Schnitten: $K \subset E$ Kreis in $G \iff K^* \subset E^*$ Schnitt in G^* .

31.4 Euler Formel

Satz 31.6 Ist G zusammenhängend und planar gezeichnet, dann gilt:

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Wenn G aus z Zusammenhangskomponenten besteht gilt:

$$|V| - |E| + |F| = z + 1$$

Beweis. (1. Duale Bäume)

Sei T_1 ein aufspannender Baum von G . Wir definieren $T_2 := (E \setminus E_{T_1})^*$. Da T_1 kreisfrei ist, wissen wir, dass T_1^* keinen Schnitt enthält. Also ist T_2 zusammenhängend. Da T_1 ein aufspannender Baum ist enthält $E \setminus T_1$ keinen Schnitt. Das bedeutet, dass T_2 kreisfrei ist. Somit ist T_2 ein aufspannender Baum von G^* . Da da T_1 und T_2 aufspannende Bäume sind gilt: $|T_1| = |V| - 1$ und $|T_2| = |V^*| - 1$. Gemeinsam decken sie alle Kanten von G ab: $|T_1| + |T_2| = |E|$. Insgesamt erhalten wir:

$$|E| = |T_1| + |T_2| = |V| - 1 + |V^*| - 1 = |V| + |V^*| - 2 = |V| + |F| - 2.$$

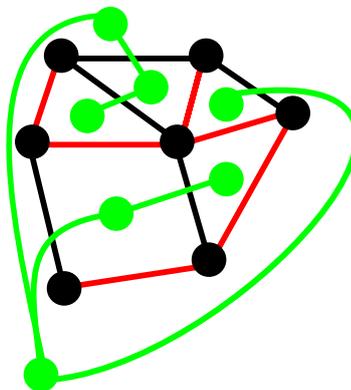


Abb. 6: Ein Aufspannender Baum

Beweis. (2. Induktion und Noahs Arche)

Wir beginnen mit dem leeren Graphen auf V , d.h. wir sehen n Knoten, 0 Kanten, 1 Fläche und n Zusammenhangskomponenten. Die Euler-Formel für diesen Graphen entspricht also der Gleichung $n - 0 + 1 = n + 1$. Dies ist der Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt ergänzen wir den aktuellen Graphen um eine Kante. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Die Kante verbindet 2 Komponenten. Die Anzahl der Komponenten verringert sich um 1.
- Die Kante ist innerhalb einer Komponente. Die Anzahl der Flächen erhöht sich um 1.

In beiden Fällen bleibt die Balance der Gleichung erhalten.

Beweis. (3. Winkelsummen und doppeltes Abzählen)

In diesem Beweis setzen wir eine gradlinige Zeichnung eines zusammenhängenden planaren Graphen voraus. Bei einem Knoten v mit $\deg(v) = r$ sehen wir dann r Winkel deren Gesamtsumme 2π ausmacht. Summiert über alle Knoten ergibt das $2|V|\pi$.

Wir werden im Folgenden einen zweiten Ausdruck für die Summe aller Winkel finden. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke wird die Euler-Formel liefern.

Lemma 31.7 Die Winkelsumme eines k -gons ist $(k - 2)\pi$.

Beweis. Wir triangulieren das k -gon mit $k - 2$ Dreiecken.

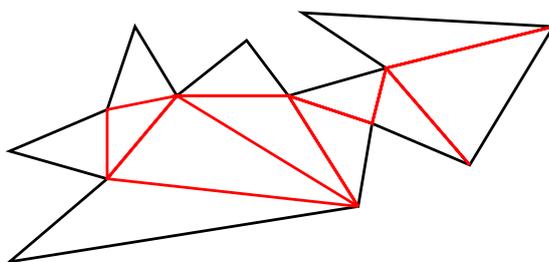


Abbildung 7: Ein trianguliertes Polygon

Jedes Dreieck trägt π zur Winkelsumme bei. △

Wenn die äußere Fläche der Zeichnung ein s -gon ist, dann ist der Beitrag dieser Fläche die Summe der Aussenwinkel. Diese ist die Summe der Vollwinkel minus der Summe der Innenwinkel, das ist: $s2\pi - (s - 2)\pi = (s + 2)\pi = (s - 2)\pi + 4\pi$, d.h. wir haben einen Überschuß von 4π gegenüber der Summe der Innenwinkel.

Nun definieren wir f_k als die Anzahl der Flächen f mit $\deg(f) = k$ und summieren die Winkel bei ihren Flächen. So erhalten wir:

$$2|V|\pi = 4\pi + \sum_k f_k(k - 2)\pi = \pi\left(4 + \sum_k k f_k - \sum_k 2f_k\right) = \pi(4 + 2|E| - 2|F|). \quad \square$$

31.5 Folgerungen aus der Eulerformel

Satz 31.8 Wenn $G = (V, E)$ planar ist und $|V| = n$, dann gilt:

- (1) G hat höchstens $3n - 6$ Kanten.
- (2) Wenn G bipartit ist, dann hat G höchstens $2n - 4$ Kanten.
- (3) G hat einen Knoten vom Grad ≤ 5 .

Beweis. Sei wieder f_k die Anzahl der Flächen f mit $\deg(f) = k$. Die folgende Formel haben wir schon im 3. Beweis der Euler Formel verwendet:

$$2|E| = 2|E^*| = \sum_{f \in F} \deg(f) = \sum_k k f_k.$$

Die Euler Formel schreiben wir als

$$n - 2 = e - f. \quad (\star)$$

(1) Wir multiplizieren (\star) mit 3 und benutzen $3f \leq \sum k f_k = 2e$:

$$3n - 6 = 3e - 3f \leq 3e - 2e = e.$$

(2) Wir multiplizieren (\star) mit 2 und benutzen $4f \leq \sum k f_k = 2e$ (Kreise in bipartiten Graphen haben gerade Länge):

$$2n - 4 = 2e - 2f \leq 2e - e = e.$$

(3) Aus (1) folgt $d_{av} = \frac{2|E|}{n} = \frac{6n-12}{n} < 6$ also existiert ein Knoten v mit $\deg(v) < 6$. \square

Folgerung.

- Wenn G planar ist, dann ist $\chi(G) \leq 6$
- K_5 ist nicht planar, da $3|V(K_5)| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < |E(K_5)| = 10$.
- $K_{3,3}$ ist nicht planar, da $2|V(K_{3,3})| - 4 = 8 < |E(K_{3,3})| = 9$.

Der Satz von Kuratowski

Satz 32.1 (Satz von Kuratowski)

Wenn G keine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält, dann ist G planar.

Beweis. Wenn der Satz falsch ist, dann gibt es Gegenbeispiele. Wenn es Gegenbeispiele gibt, dann gibt es auch bezüglich der Knotenzahl minimale Gegenbeispiele. Wir nehmen an, dass es so ein minimales Gegenbeispiel H gibt und werden diese Annahme am Ende ad absurdum führen.

Zunächst zeigen wir, dass H 3-fach zusammenhängend sein muss. Dazu diskutieren wir die drei Fälle mit kleinerem Zusammenhang:

- $H = H_1 \dot{\cup} H_2$ ist nicht zusammenhängend. Da H_1 und H_2 kleiner sind besitzen sie planare Zeichnungen. Diese lassen sich zu einer kreuzungsfreien Zeichnung von H kombinieren.

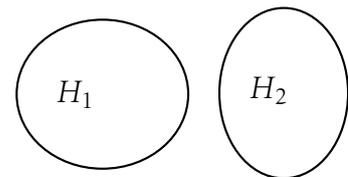


Abb. 1: H ist nicht unzusammenhängend.

- H ist nur 1-Zusammenhängend, besitzt also einen trennenden Knoten v . Sei H_1 eine Komponente von $H \setminus v$ und $H_2 = H \setminus H_1$. Es gibt planare Zeichnungen von $H_1 + v$ und H_2 . Wir können eine mit v inzidente Fläche von $H_1 + v$ zur äußeren Flächen machen und die Zeichnungen dann wie in Abb. 2 gezeigt kombinieren.

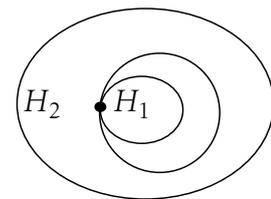


Abb. 2: H ist nicht nur 1-zusammenhängend.

- H hat einen 2-Separator $\{x, y\}$. Sei H_1 eine Komponente von $H \setminus \{x, y\}$ und $H_2 = H \setminus H_1$. Es gibt planare Zeichnungen von $H_1 + x + y$ und H_2 . Sogar mehr, es gibt planare Zeichnungen von $H_1 + x + y$ und H_2 zusammen mit der Kante $e = (x, y)$ (andernfalls hätten wir ein kleineres Gegenbeispiel!). Wir können eine mit e inzidente Fläche von $H_1 + x + y$ zur äußeren Flächen machen und die Zeichnungen dann wie in Abb. 3 gezeigt kombinieren.

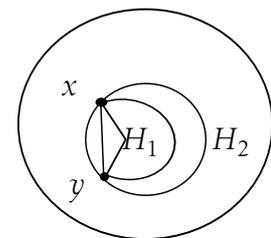


Abb. 3: H ist nicht nur 2-zusammenhängend.

Lemma 32.2 Wenn G 3-zusammenhängend ist und $|V(G)| \geq 5$, dann existiert eine Kante e sodass G/e (e wird kontrahiert) 3-zusammenhängend ist.

Beweis. Wir argumentieren erneut mit einem minimalen Gegenbeispiel. Wir sagen e ist 3-kontrahierbar wenn G/e 3-zusammenhängend ist. Wenn die Kante $e = \{x, y\}$ nicht 3-kontrahierbar ist, dann ist der Kontraktionsknoten v_e in einem 2-Separator von G/e .

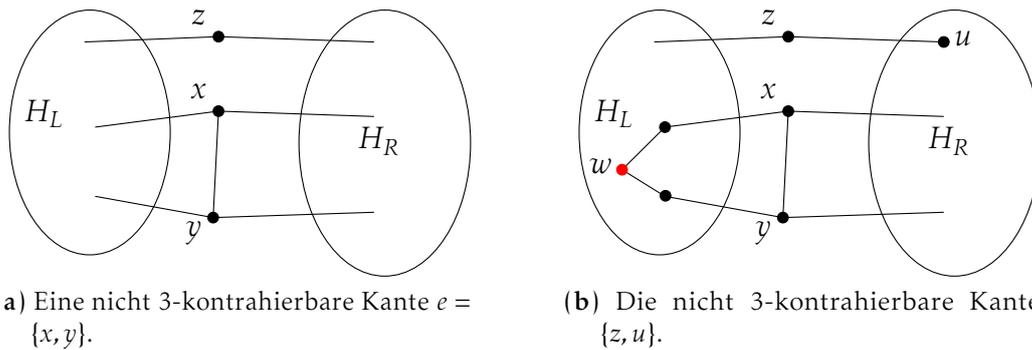


Abbildung 4: Zum Beweis von Lemma 32.2.

Angenommen keine Kante ist 3-kontrahierbar. Wir wählen $e = \{x, y\}$ so, dass H_L maximal ist (siehe Abb.4a). Sei u ein Nachbar von z in H_R . Die Kante $\{z, u\}$ ist auch nicht 3-kontrahierbar. Wo ist also der Partner w aus dem Separator $\{z, u, w\}$?

- w kann nicht in H_R sein, denn $\{x, y\}$ wurde so gewählt, dass H_L maximal ist.
- w kann nicht in H_L sein, denn sonst ist $\{z, w\}$ ein Separator.

Also kann es w nicht geben, sodass $\{z, u\}$ 3-kontrahierbar sein muss. □

Lemma 32.3 Wenn G keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ enthält, dann enthält G/e auch keine.

Beweis. Sei K eine K_5 oder $K_{3,3}$ Unterteilung von G/e . Der Kontraktionsknoten $v_e \in G/e$ ist in K , denn sonst wäre K schon eine K_5 oder $K_{3,3}$ Unterteilung von G . Es können folgende Fälle auftreten:

- v_e ist Unterteilungsknoten in K , d.h. $\deg(v_e) = 2$. Abb. 5 zeigt wie in den beiden möglichen Fällen aus der K_5 oder $K_{3,3}$ Unterteilung in G/e eben so eine Unterteilung in G konstruiert wird.

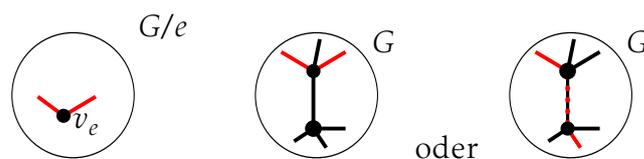


Abbildung 5: v_e ist Unterteilungsknoten in H .

- Sei $e = \{x, y\}$ und v_e ein Verzweigungsknoten in K . Wir unterscheiden 2 Fälle:
 - $\deg_K(x) \leq 1$. In diesem Fall können wir die Kante (x, y) verwenden um x als Unterteilungsknoten in eine K -unterteilung von G einzubauen, siehe Abb. 6.

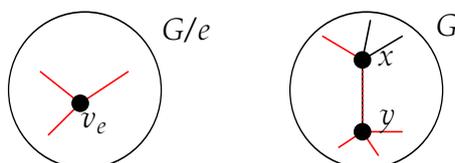


Abbildung 6: Knoten x hat nur eine K -Kante.

- $\deg_K(x) = \deg_K(y) \geq 2$. In diesem Fall ist $\deg_K(v_e) \geq 4$ und K muß eine Unterteilung des K_5 sein. Die Kante (x, y) zusammen mit den Kanten von K erzeugt eine $K_{3,3}$ Unterteilung in G , siehe Abb. 7.

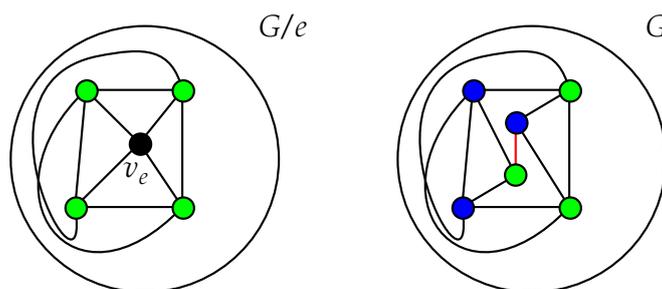


Abbildung 7: Aus dem K_5 in G/e entsteht ein $K_{3,3}$ in G .

Wir haben nun alle Versatzstücke beieinander um den Beweis des Satzes von Kuratowski abzuschliessen. Sei H ein minimales Gegenbeispiel. H hat die folgenden Eigenschaften:

- H ist nicht planar
- H ist $K_5, K_{3,3}$ Unterteilungsfrei
- H ist 3-zusammenhängend

Sei e nun eine 3-kontrahierbare Kante, diese existiert nach Lemma 32.2. Nun ist H/e 3-zusammenhängend und wegen Lemma 32.3 auch frei von $K_{3,3}$ und K_5 Unterteilungen. Aufgrund der Minimalität von H kann H/e kein Gegenbeispiel sein kann. Also ist H/e planar.

Wir betrachten nun eine planare Zeichnung von H/e . Mit F_e bezeichnen wir die Fläche in der induzierten Zeichnung von $H/e - v_e$ in der v_e liegt. Wir wissen, dass ∂F_e ein einfacher Kreis C ist, denn sonst hätten wir einen trennenden Knoten. Die Knoten von C in zyklischer Reihenfolge seien (x_1, x_2, \dots, x_k) . Falls nun i, j existieren,

sodass alle Nachbarn von x auf C im Intervall $[x_i, x_j]$ liegen und alle Nachbarn von y im Intervall $[x_j, x_i]$, dann kann H kreuzungsfrei gezeichnet werden und ist also planar, Widerspruch.

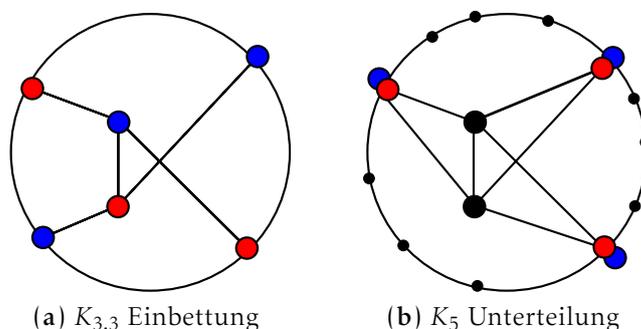


Abbildung 8

Andernfalls existiert eine Alternierung zwischen den Nachbarn von x und denen von y auf C . Die beiden relevanten Möglichkeiten für so eine Alternierung sind in Abb. 8 dargestellt, dort ist auch gezeigt, dass die Alternierungen je die Existenz einer $K_{3,3}$ oder K_5 Unterteilung in H implizieren. Damit ist gezeigt, dass die 3 oben gelisteten Eigenschaften des minimalen Gegenbeispiels H unverträglich miteinander sind, so dass es kein Gegenbeispiel geben kann. \square

Bemerkung. Der Satz von Wagner besagt, dass G genau dann planar ist, wenn G keinen K_5 oder $K_{3,3}$ Minor enthält. Der Satz von Wagner folgt sofort aus dem Satz von Kuratowski, denn aus einer K Unterteilung in G entsteht durch Kontaktion von Kanten ein K Minor. Die Rückrichtung ist in beiden Fällen klar, da Planarität unter Minorenbildung erhalten bleibt.

32.1 Das Art-Gallery-Problem

Fragestellung: Gegeben sei ein einfacher geschlossener Polygonzug P mit n Ecken, wir stellen uns P als Grundriss eines Museums vor. In diesem Museum sind wertvolle Gegenstände die bewacht werden müssen. Als „Wächter“ können wir Punkte im Inneren von P plazieren. Ein Wächter w sieht einen Punkt q wenn das offene Segment (w, q) keinen Punkt von P enthält.

Die Frage ist nun: Wie viele Wächter sind nötig um das Innere von P zu überwachen?

Untere Schranke In Abb. 9 ist ein Polygon mit $3k$ Ecken und k Zacken gezeigt. Kein Wächter kann zwei Zacken überschauen, also benötigt man in diesem Fall mindestens k Wächter. Dies liefert unsere untere Schranke.

Proposition 32.4 *Es gibt Polygone mit n Ecken zu deren Überwachung $\frac{n}{3}$ Wächter nötig sind.*

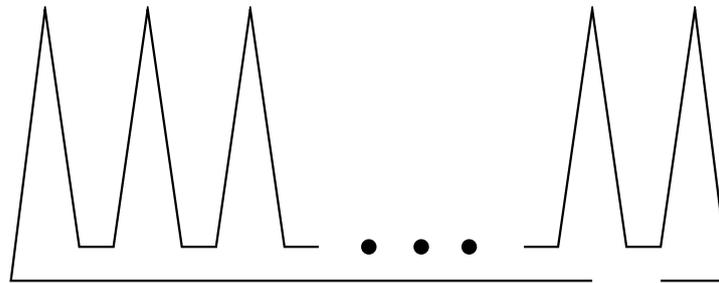


Abbildung 9: Ein Beispiel für die untere Schranke.

Obere Schranke Wir werden zeigen, dass $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter immer genügen. Das elegante Argument dafür geht auf Fisk zurück.

Wir beginnen mit einer Abfolge einfacher Tatsachen/Überlegungen.

- Jedes Polygon kann durch zusätzliche Kanten trianguliert werden.
- Jede innere Kante der Triangulierung ist trennend.
- Die Triangulierung besitzt eine 3-Färbung.
- Nach dem Schubfachprinzip enthält eine der Farbklassen höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Ecken des Polygons.
- Jede Farbklass der 3-Färbung deckt eine Ecke jedes Dreiecks der Triangulierung ab. Daher ist jede Farbklass eine "gute" Wächtermenge.

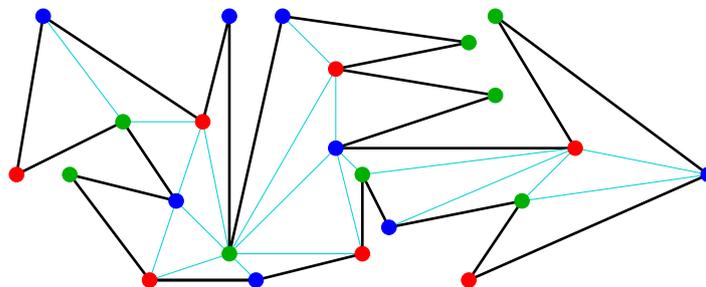


Abbildung 10: Ein Polygon mit 23 Ecken, eine Triangulierung (hellblau) und eine 3-Färbung der Triangulierung. Die rote Farbklass benötigt $7 \leq \frac{23}{3}$ Wächter.

32.2 5-Färbbarkeit planarer Graphen (Kempeketten)

Wir wollen zeigen, dass alle planaren Graphen 5-färbbar sind. Dazu führen wir eine Induktion nach der Anzahl der Knoten. Den Anfang machen wir mit $n \leq 5$, da ist die Aussage trivial.

Sei nun G planar mit $n > 5$ gegeben. Wir wählen einen Knoten v mit $\deg(v) \leq 5$ (Satz 31.8.3). Nach Induktionsvoraussetzung ist $G - v$ 5-färbbar. Wir erweitern die Färbung von $G - v$ zu einer Färbung von G . Dies ist nur in einem Fall „schwierig“,

nämlich wenn $\deg(v) = 5$ und die Nachbarn von v bereits alle Farben nutzen. Seien v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 die Nachbarn von v in zyklischer Reihenfolge, wir nehmen an, dass v_i mit Farbe i gefärbt ist.

Betrachte den Graphen $H_{3,5}$ der von den 3 und 5 gefärbten Knoten induziert ist. Es können zwei Fälle auftreten:

1.) v_3 und v_5 liegen in verschiedenen Komponenten von $H_{3,5}$. In diesem Fall tauschen wir die Farben 3 und 5 in der Komponente von v_5 aus. Jetzt ist v_5 mit Farbe 3 gefärbt und wir können Farbe 5 für v verwenden.

2.) Andernfalls gibt es einen Weg von v_5 nach v_3 in $H_{3,5}$ (siehe Abb. 11). Wir betrachten nun den durch die in Farben 1 und 4 induzierten Graphen $H_{1,4}$. Der 3-5 gefärbte Pfad und die Planarität erzwingen, dass v_1 und v_4 in verschiedenen Komponenten von $H_{1,4}$ liegen. Wir tauschen die Farben 1 und 4 in der Komponente von v_1 von $H_{1,4}$ aus. Jetzt ist v_1 mit Farbe 4 gefärbt und wir können Farbe 1 für v verwenden. \square

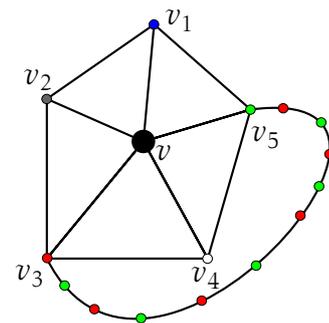


Abb. 11: G mit v_3, v_5 -Weg

Bemerkung. In Wahrheit sind planare Graphen sogar 4-färbbar. Dieses Resultat ist unter dem Namen „Vier-Farben-Satz“ bekannt.

Elektrische Netze und aufspannende Bäume

In der 6. Vorlesung haben wir das Spiel *Bridg-It* kennengelernt und gesehen, dass aufspannende Bäume hier bei der Beschreibung einer Gewinnstrategie hilfreich sind. Das zweite Thema der Vorlesung war der Satz von Cayley über die Anzahl der aufspannenden Bäume vollständiger Graphen. Für diesen Satz haben wir drei sehr unterschiedliche Beweise besprochen. In diesem Kapitel^{XII} wird es um eine weitere Anwendung aufspannender Bäume gehen. Wir beginnen mit elektrischen Netzen und Graphen, die aufspannenden Bäume kommen später überraschend ins Spiel.

33.1 Elektrische Netze

Ein elektrisches Netz ist ein Graph (gegebenenfalls auch ein Multigraph) in dem jeder Kante e_i ein Widerstand (resistance) r_i zugeordnet ist. Um den Stromfluß im Netz zu beschreiben sprechen wir über **Stromstärken** und **Potentialdifferenzen** (Spannungen).

Sei $e_i = (u, v)$, p_i die Potentialdifferenz und w_i die Stärke des Stroms von u nach v , dann gilt

$$r_i \cdot w_i = p_i \quad (\text{Ohmsches Gesetz})$$

Für das Weitere ist es nützlich orientierte Kanten also Kanten mit Start- und Zielknoten zu betrachten. Oben haben wir für e_i eine Orientierung durch die Notation $e_i = (u, v)$ schon unter der Hand als $u \rightarrow v$ vorgegeben.

Ströme und Spannungen sind antisymmetrisch, d.h.

$$w_{uv} = -w_{vu} \quad \text{und} \quad p_{uv} = -p_{vu}.$$

Ströme und Spannungen in elektrischen Netzen genügen den Kirchhoffschen^{XIII} Gesetzen:

(KG I) Für einen Knoten x mit Nachbarn v_1, v_2, \dots, v_d und Quellstärke q_x gilt:

$$w_{x,v_1} + w_{x,v_2} + \dots + w_{x,v_d} = q_x.$$

(KG II) Für jeden Kreis u_1, u_2, \dots, u_k gilt:

$$p_{u_1,u_2} + p_{u_2,u_3} + \dots + p_{u_{k-1},u_k} + p_{u_k,u_1} = 0.$$

^{XII}Zu diesem Kapitel gab es im WS13/14 keine Vorlesung. Das Kapitel ist zu Beginn des Projekts als Beispiel und Anregung für die Ausarbeitungen der Studenten entstanden.

^{XIII}Übung: Wikipedia[Gustav Robert Kirchhoff] lesen und sein Grab in Schöneberg besuchen.

Das Potenzialgesetz KG II erlaubt es den Knoten absolute Potentiale zuzuordnen, so dass $p_{u,v}$ die Differenz der Potentiale von v und u ist. Das beweisen wir in einem Lemma.

Lemma 33.1 Sei G zusammenhängend und p eine antisymmetrische Abbildung von E nach \mathbb{R} die KG II erfüllt. Zu einem ausgewählten Knoten $v_0 \in V$ gibt es dann eine eindeutige Abbildung $\mu : (V - v_0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mu(v_0) = 0$ und $p_{u,v} = \mu(u) - \mu(v)$ für alle $uv \in E$.

Beweis. Um $\mu(v)$ festzulegen wähle einen Weg (hier benötigen wir den Zusammenhang) $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{a-1}, v_a = v$ und bestimme $\mu(v) = \mu(v_0) + p_{v_0v_1} + p_{v_1v_2} + \dots + p_{v_{a-1}v_a}$. Zu zeigen ist nun, dass das wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl des Weges abhängt. Zwei Wege $v_0, v_1, \dots, v_a = v$ und $v_0, u_1, \dots, u_b = v$ können zu einem geschlossenen Kantenzug $v_0, u_1, \dots, u_b, v_a, \dots, v_1, v_0$ verknüpft werden. Aus KG II folgt (da kann durchaus ein Argument ausgearbeitet werden), dass $p_{v_0v_1} + p_{v_1v_2} + \dots + p_{v_{a-1}v_a} + p_{u_bu_{b-1}} + \dots + p_{u_1v_0} = 0$ gilt. Daraus folgt, dass die Wahl des Weges irrelevant ist. \square

Wir betrachten ein Beispiel. In der Abbildung 1 sind links die Widerstände r_e an den Kanten festgelegt. In der Mitte sind die Flüsse mit den Quellstärken $q_s = 1, q_t = -1$ und $q_i = 0$ sonst, wobei die nicht verschwindenden Quellstärken durch Halbkanten dargestellt werden. Die Flüsse $\neq e, f$ können dank der Flusserhaltung (KG I) eliminiert werden (durch e, f und 1 ausgedrückt werden). Rechts schliesslich sind die Potentiale mit der Ohmschen Gleichung $r_{uv}w_{uv} = \mu(u) - \mu(v)$ und der Normierung $\mu(t) = 0$ entlang der fetten Kanten berechnet worden. Das Ohmsche Gesetz für die beiden übrigen Kanten liefert $3f = e - 2(1 - e)$ und $4(1 - e - f) = (6e + 5f) - 2(1 - e)$. Diese zwei Gleichungen in zwei Variablen haben die Lösung $e = 4/7$ und $f = -2/21$. Die Potentialdifferenz die man benötigt um den Flusswert 1 zu erhalten ist der effektive Widerstand. In unserem Fall ist $6e + 5f = 62/21$ der effektive Widerstand zwischen s und t .

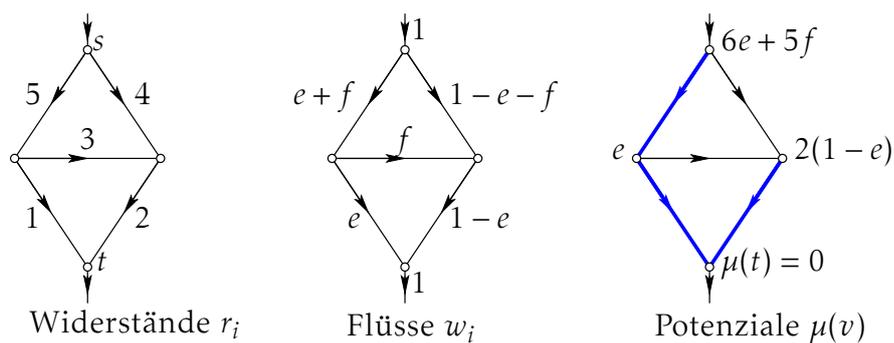


Abbildung 1: Ein Stromnetz mit Widerständen, Flüssen und Potentialen (von links nach rechts).

Eine heuristische Nebenüberlegung: Sei (V, E) ein zusammenhängendes Netz mit m Kanten, n Knoten und Widerständen $r : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Wir setzen m Variablen w_e für die Flusswerte an. Die Flusserhaltung (KG I) liefert $n - 1$ linear unabhängige Bedingungen

(Dimension des Schnittraumes). Diese verwenden wir zur Elimination, es bleiben $m - n + 1$ Variablen. Benutze einen aufspannenden Baum um ausgehend von $\mu(v_0) = 0$ ausgehend die Potenziale zu bestimmen. Jede Kante, die nicht im Baum ist, schließt mit den Baumkanten einen Kreis, in dem das Potenzialgesetz (KG II) gelten muss (das entspricht der Ohmschen Gleichung $r_{uv}w_{uv} = \mu(u) - \mu(v)$ für die Nichtbaumkante uv !). Insgesamt liefert das $m - n + 1$ Gleichungen. Das lineare Gleichungssystem ist also quadratisch, wenn es nicht-degeneriert ist bekommen wir eine eindeutige Lösung. Die Physik sagt, dass die Lösung tatsächlich eindeutig ist. Im folgenden Satz werden wir das für den Fall in dem alle Widerstände $r_e = 1$ sind bewiesen.

Sei $N = (V, E)$ ein zusammenhängendes Netz mit ausgezeichneten Knoten s und t . Für eine Kante (u, v) sei $T(u, v)$ die Anzahl der aufspannenden Bäume S von N , in denen der Pfad von s nach t die Kante u, v enthält, anders gesagt S enthält (u, v) und in $S - (u, v)$ sind s mit u sowie v mit t in gemeinsamen Komponenten.

Satz 33.2 (Kirchhoff)

Sei $N = (V, E)$ ein zusammenhängendes Netz mit ausgezeichneten Knoten s und t und Widerständen $r_e = 1$ für alle e . Die Werte $w_{(u,v)} := T(u, v) - T(v, u)$ definieren einen elektrischen Fluss von s nach t in N mit Flussstärke $q_s = -q_t = \#(\text{aufspannender Bäume von } N)$.

Beweis. Wir müssen die beiden Gesetze KG II und KG I nachweisen. Für KG I ist das ganz einfach: Jeder aufspannende Baum S trägt eine Einheit Fluss entlang des eindeutigen $s \rightarrow t$ Pfades in S bei, der Gesamtfluss ergibt sich als Summe der einzelnen Pfadflüsse. Flusserhaltung gilt für jeden Pfad und auch für die Summe der Pfade, also den Gesamtfluss.

Um KG II nachzuweisen müssen wir ein bisschen mehr tun. Zuerst beobachten wir, dass wegen $w_e = p_e/r_e$ und $r_e = 1$ aus dem Potenzialgesetz ein Kreisflussgesetz wird. Das heißt, es genügt nachzurechnen, dass für jeden Kreis u_1, u_2, \dots, u_k in N gilt: $w_{u_1, u_2} + w_{u_2, u_3} + \dots + w_{u_{k-1}, u_k} + w_{u_k, u_1} = 0$.

Wir nennen einen aufspannenden Wald mit zwei Komponenten F_s, F_t mit $s \in F_s$ und $t \in F_t$ ein Dickicht.

Beobachtung.

$$T_{(u,v)} = \#(\text{Dickichte mit } u \in F_s \text{ und } v \in F_t)$$

Beobachtung. Ein Dickicht, (F_s, F_t) kann mit jeder Kante (u, v) mit $u \in F_s$ und $t \in F_t$ zu einem Baum erweitert werden. Die Kante (u, v) liegt dann natürlich auf dem $s \rightarrow t$ Pfad des Baumes.

Wenn wir nun einen Kreis u_1, u_2, \dots, u_k und ein Dickicht (F_s, F_t) betrachten, dann gilt:

$$\#(i : u_i \in F_s \text{ und } u_{i+1} \in F_t) - \#(i : u_i \in F_t \text{ und } u_{i+1} \in F_s) = 0 \quad (\text{i})$$

Dies gilt, weil sich Indizes i , die einen positiven Beitrag leisten, und Indizes, die einen negativen Beitrag leisten, abwechseln.

Um unser “double counting” Argument griffig kodieren zu können hier noch ein bisschen Notation: Für einen Baum S sei $w_{u,v}^S$ der Beitrag von S zu $w_{u,v}$, d.h. abhängig von der Orientierung von (u,v) auf dem $s \rightarrow t$ Pfad in S kann $w_{u,v}$ die Werte $+1, -1, 0$ annehmen. Für ein Dickicht F sei $w_{u,v}^F := w_{u,v}^{F+(u,v)}$, das ist 0 wenn $F+(u,v)$ kein Baum ist und sonst über den Baum $F+(u,v)$ definiert.

Sei also u_1, u_2, \dots, u_k ein Kreis in N . Mit der soeben eingeführten Notation ist dasselbe wie $\sum_i w_{u_i, u_{i+1}}^F = 0$, für jedes Dickicht F . Daher gilt: $w_{u_1, u_2} + w_{u_2, u_3} + \dots + w_{u_{k-1}, u_k} + w_{u_k, u_1} = \sum_i w_{u_i, u_{i+1}} = \sum_i \sum_T w_{u_i, u_{i+1}}^T = \sum_i \sum_F w_{u_i, u_{i+1}}^F = \sum_F \sum_i w_{u_i, u_{i+1}}^F = \sum_F 0 = 0$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

33.2 Squaring the Square

„Squaring the Square“ ist der Titel einer Kolumne von Martin Gardner in der er Ergebnisse der Arbeit [3] von Brooks, Smith und Tutte „The Dissection of Rectangles into Squares“ zusammenfasst.

Eine „Dissection of Rectangles into Rectangles“ (wir werden es Rechteckszerlegung nennen) ist eine Partition eines Basisrechtecks in Teilrechtecke wie in Abb. 2, links. In [3] fragen sich die Autoren unter welchen Umständen eine solche Zerlegung in Rechtecke zu einer äquivalenten Zerlegung in Quadrate (Quadratzerlegung) gehört. Eine zu der in Abb. 2 links dargestellten Rechteckszerlegung äquivalente Quadratzerlegung ist in derselben Abbildung rechts dargestellt.

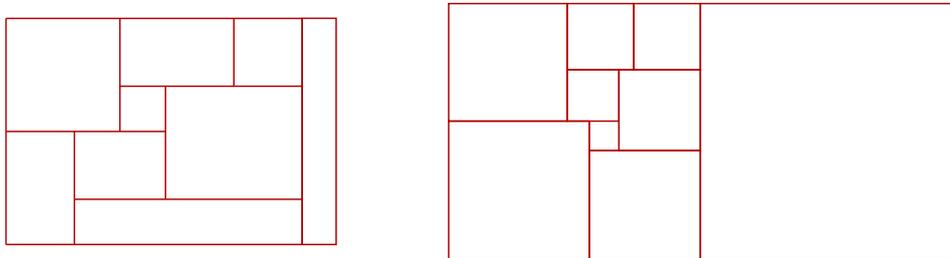


Abbildung 2: Eine Rechteckszerlegung mit einer äquivalenten Quadratzerlegung.

Aus dem Vergleich der beiden Zerlegungen erschliesst sich der hier verwendete Begriff der Äquivalenz, den wir zunächst formal definieren wollen.

Zwei Rechteckszerlegungen sind äquivalent, wenn es eine Bijektion zwischen den Segmenten gibt, die die *Orientierung* (horizontal, vertikal) und die *endet auf* Relation erhält sowie die Rahmensegmente links, rechts, oben und unten auf die entsprechenden Rahmensegmente abbildet. Eine alternative Definition der Äquivalenz bekommen wir indem wir mit der Rechteckszerlegung ihren H-Graphen betrachten. Die Knoten des H-Graphen sind die horizontalen Segmente der Zerlegung. Die Kanten des H-Graphen entsprechen den Rechtecken der Zerlegung, sie verbinden jeweils das untere mit dem oberen Segment. Zusätzlich gibt es eine Kante, die das untere Rahmensegment s mit dem oberen Rahmensegment t verbindet. Abbildung 3 illustriert die Konstruktion des H-Graphen.

Tatsache A. Der H-Graph einer Rechteckszerlegung hat eine natürliche planare (kreuzungsfreie) Einbettung.

Tatsache B. Zwei Rechteckszerlegungen sind äquivalent \iff ihre H-Graphen sind als planar eingebettete Graphen mit s und t identisch.

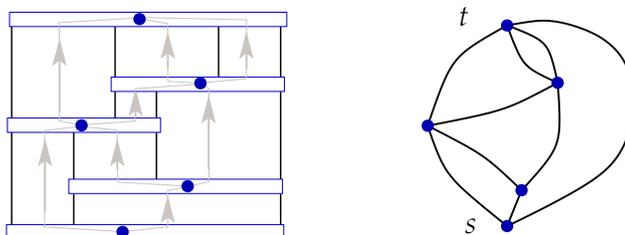


Abbildung 3: Der H-Graph der Rechteckszerlegung aus Abb. 2.

Wir nehmen an, dass Kanten des H-Graphen Widerstand 1 haben und nennen den Graphen, den wir durch Löschen der Kante (s, t) im H-Graphen erhalten den H' -Graphen. Einen elektrischen Fluss im H' -Graphen bekommen wir mit $w_{(u,v)} := T(u, v) - T(v, u)$ (vergl. den Beweis von Satz 33.2). Wir erinnern uns, dass es einfach war die Flusserhaltung (KG I) für diese $w_{(u,v)}$ nachzuweisen. Wir werden im Folgenden zeigen, dass das Potentialgesetz (KG II) in unserem Fall genauso leicht hergeleitet werden kann.

Zunächst definieren wir den V-Graphen zur Rechteckszerlegung ganz analog zum H-Graphen, nur dass wir diesmal die vertikalen Segmente zu Knoten des Graphen machen. Die Konstruktion ist in Abb. 4 dargestellt.

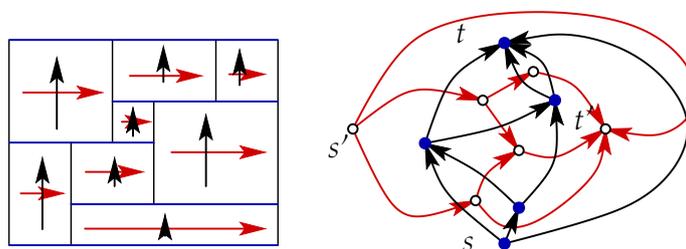


Abbildung 4: Der H-Graph und der V-Graph der Rechteckszerlegung.

Wir beobachten, dass der H-Graph und der V-Graph dual^{XIV} zueinander sind, d.h. wir haben Bijektionen: $H\text{-Knoten} \leftrightarrow V\text{-Flächen}$, $H\text{-Flächen} \leftrightarrow V\text{-Knoten}$ und $H\text{-Kanten} \leftrightarrow V\text{-Kanten}$. Diese Bijektionen σ haben die Eigenschaft, dass wenn (u, v) eine H-Kante ist und f, g die angrenzenden Flächen, dann ist $\sigma((u, v)) = (\sigma(f), \sigma(g))$ die zugehörige V-Kante mit angrenzenden Flächen $\sigma(u), \sigma(v)$. (Für die duale Kante zu (u, v) schreibt man statt $\sigma((u, v))$ meistens $(u, v)^*$).

Ohne Beweis werden wir die folgende Dualität aufspannender Bäume verwenden:

- Ist $S \subset E_H$ ein aufspannender Baum im H-Graphen, dann ist $S^* = E_V \setminus S^*$ ein aufspannender Baum von V .

^{XIV}Die Dualität planarer Graphen werden wir später noch genauer kennenlernen

Wir definieren

$$T_{(u,v)} = \#(\text{Bäume von } H' \text{ mit Pfad } s \rightarrow u, v \rightarrow t)$$

$$T_{(f,g)}^* = \#(\text{Bäume von } V' \text{ mit Pfad } s' \rightarrow f, g \rightarrow t')$$

Lemma 33.3 Wenn f und g die Flächen links und rechts der Kante $u \rightarrow v$ im H -Graphen sind, dann gilt $T_{(f,g)}^* = T_{(u,v)}$.

Beweis. Sei S ein aufspannender Baum des H' -Graphen mit einem Pfad $s \rightarrow u, v \rightarrow t$. Wir fassen S als aufspannenden Baum des H -Graphen auf und betrachten den dualen Baum S^* , dieser enthält die Kante (s', t') . Wir definieren $\hat{S} = S^* - (s', t') + (f, g)$, dies ist ein Baum des V' -Graphen mit einem Pfad $s' \rightarrow f, g \rightarrow t'$. Beispiele für die Abbildung $S \leftrightarrow \hat{S}$ zusammengestellt. Das Lemma wird bewiesen indem man zeigt, dass die Abbildung eine Bijektion ist. □

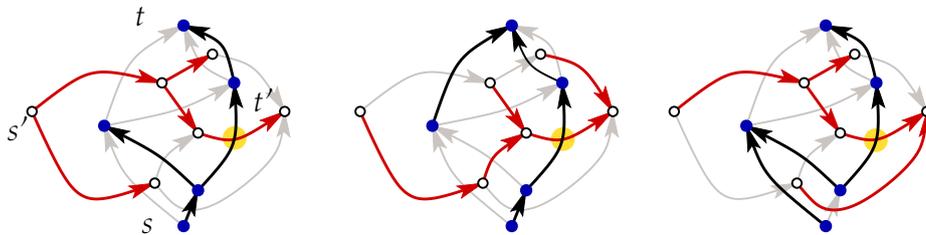


Abbildung 5: Drei Beispiele für die Abbildung $S \leftrightarrow \hat{S}$ bezüglich des Kantenpaars das sich im unterlegten Kreis schneidet.

Die Flussserhaltung für den dualen Fluss $w_{(f,g)}^* = T^*(f, g) - T^*(g, f)$ liefert mit $w_{(f,g)}^* = w_{(u,v)}$, wenn wie im Lemma $(f, g) = (u, v)^*$, das Kreisflussgesetz (KG II) für w und Flächenkreise. Das Kreisflussgesetz kann als $w^T \cdot k = 0$ für $k \in Z$ geschrieben werden. Da die Flächenkreise eine Basis des Zyklenraumes Z sind erhält man das Kreisflussgesetz für w auf beliebigen Kreisen durch lineare Fortsetzung.

Repräsentiert man den Fluss w_e in einer Kante des H -Graphen durch die Breite des zugehörigen Rechtecks und den dualen Fluss w_e^* durch die Höhe des Rechtecks, dann erhält man das Resultat von Brooks, Smith, Stone und Tutte:

Satz 33.4 Zu jeder Rechteckszerlegung gibt es eine äquivalente Quadratzerlegung.

Literatur und Hintergrund

Das Interesse der Autoren von [3] galt in erster Linie Quadratzerlegungen, in denen die Rahmensegmente ein Quadrat bilden und die Quadrate paarweise verschiedene Seitenlängen haben, solche Quadratzerlegungen werden perfekt genannt, Abb. 6 zeigt ein Beispiel.

Das zweite Kapitel von Bollobas [2] heißt “*Electrical Networks*”, dort findet man mehr zum Thema. Verschiedenste Aspekt der Beziehung zwischen Graphen und Rechteckszerlegungen werden in meinem Übersichtsartikel [5] besprochen.

Von elektrischen Netzen und effektivem Widerstand gibt es auch wichtige Verbindungen zu Markov Ketten und Random Walks (Zufallsspaziergängen): Wenn eine Einheit Strom von s nach t durch ein Netz N fließt, dann ist der Fluss in einer Kante (u, v) proportional zur erwarteten Anzahl von Passagen Zufallsspaziergänger durch (u, v) (Passagen $v \rightarrow u$ werden negativ gezählt) der das Netz in s betritt und beim ersten Besuch von t verlässt. Der Proportionalitätsfaktor ist gerade der effektivem Widerstand. Mehr dazu findet man bei Doyle und Snell [4] und auch bei Motwani und Raghavan [6].

Nicht direkt mit elektrischen Flüssen im Zusammenhang steht der folgende Satz von Dehn.

Satz 33.5 *Wenn jedes Rechteck einer Rechteckszerlegung zumindest eine ganzzahlige Seitenlänge hat, dann hat auch das umschließende Rechteck mindestens eine ganzzahlige Seitenlänge.*

Ich erwähne den Satz hier, weil es zahlreiche schöne, mehr oder weniger kombinatorische Beweise für ihn gibt, vergl. [1, Kap. 26] und die dort angegebenen Literaturhinweise.

Literaturverzeichnis

- [1] M. AIGNER AND G. M. ZIEGLER, *Das BUCH der Beweise* (3. Aufl.), Springer-Verlag, 2010.
- [2] B. BOLLOBAS, *Modern Graph Theory*, vol. 184 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2002.
- [3] R. L. BROOKS, C. A. B. SMITH, A. H. STONE, AND W. T. TUTTE, *The dissection of rectangles into squares*, Duke Math. J., 7 (1940), 312–340.
- [4] P. G. DOYLE AND J. L. SNELL, *Random walks and electric networks*, Mathematical Association of America, 1984. math.dartmouth.edu/~doyle/docs/walks/walks.pdf.
- [5] S. FELSNER, *Rectangle and square representations of planar graphs*, in *Thirty Essays in Geometric Graph Theory*, J. Pach, ed., Springer, 2013, 213–248.
- [6] R. MOTWANI AND P. RAGHAVAN, *Randomized Algorithms*, Cambridge Univ. Press, 1995.

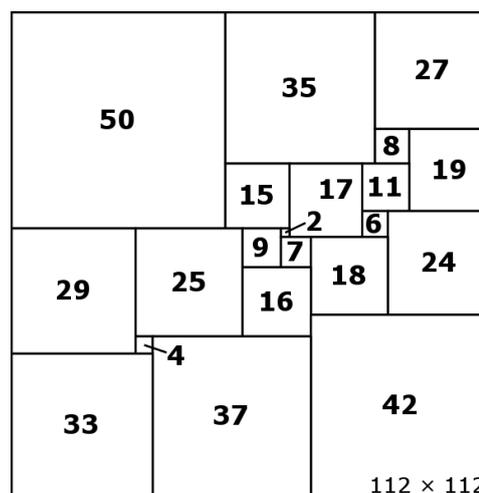


Abb. 6: Die kleinste perfekte Quadraterlegung.