
**7. Übungszettel für die Vorlesung:
Vorlesung über Graphentheorie (DS II)**

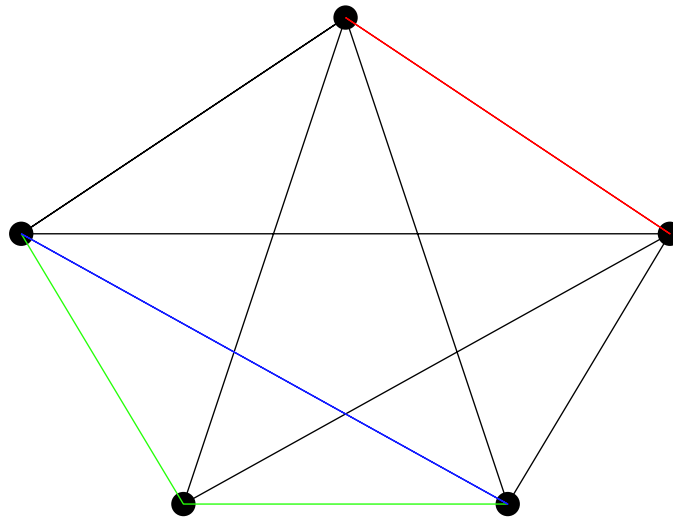
Felsner, Heldt

25. November

Abgabedatum: 01. Dezember.

<http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsII09.html>

- (1) Sei G ein Graph mit $n \geq 6$ Knoten. Zeige, dass stets entweder $\omega(G) \geq 3$ oder $\alpha(G) \geq 3$ gilt.
- (2) Zeige, dass jeder Graph H mit $\chi(H) \leq k$ in $T_k(r)$ für ein hinreichend großes $r \in \mathbb{N}$ eingebettet werden kann, also dass H ein Subgraph von $T_k(r)$ ist.
- (3) Sei G der Petersen Graph. Bestimme $\alpha(G), \omega(G), \gamma(G)$ und $\chi(G)$.
- (4) Finde eine obere Schranke fuer $\text{ex}(n, K_{3,2})$.
- (5) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wir wollen G zerlegen in vollständige, bipartite Graphen, das heißt, wir suchen eine Partitionierung der Kanten $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k = E$ mit $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so dass die Graphen (V_{P_i}, P_i) vollständige, bipartite Graphen sind (dabei bezeichnet $V_{P_i} \subseteq V$ die Menge der Knoten die in den Kanten in P_i enthalten sind).



der K_5 zerlegt in einen $K_{3,2}$, einen $K_{2,1}$ und zwei $K_{1,1}$.

- (a) Zeige, dass eine derartige Zerlegung stets möglich ist.
- (b) Beweise, dass aus der Existenz von k positiven (oder k negativen) Eigenwerten von G folgt, dass eine wie oben beschriebene Zerlegung mindestens k vollständige, bipartite Graphen benötigt.

Tipp: und verwende den Trägheitssatz von Sylvester. Dieser Satz aus der linearen Algebra impliziert, dass jede symmetrische Bilinearform A mithilfe einer Basistransformation S auf die Gestalt

$$S^T A S = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

gebracht werden kann.