

Prof. Stefan Felsner  
Felix König

## 10. Übungsblatt

Besprechung: Mittwoch, 9.1.2008, in der Übung

Relevante Aufgaben: 4

### Aufgabe 51

Sei  $H = (V_1 \cup V_2, E)$  ein bipartiter Graph mit  $\Delta(G) = k$ . Seien  $v \in V_1$  und  $w \in V_2$  mit  $(v, w) \notin E$  und  $d(v), d(w) < k$ . Es sei außerdem eine zulässige Kantenfärbung  $c : E \rightarrow [k]$  gegeben.

- Der Graph  $G$  entsteht aus  $H$  durch Hinzufügen der Kante  $(v, w)$ . Zeige, wie man eine zulässige Kantenfärbung  $c' : E(G) \rightarrow [k]$  für  $G$  aus  $c$  berechnen kann.
- Folgere daraus, dass für bipartite Graphen  $G$   $\chi'(G) = \Delta(G)$  gilt.

### Aufgabe 52

Sei  $G$  der Petersen Graph.

- Zeige, dass  $G$  nicht hamiltonsch ist.
- Bestimme  $\chi'(G)$ .

### Aufgabe 53

Verwende den Satz von Brooks, um zu zeigen:

$$\Delta(G) = 3 \quad \Rightarrow \quad \chi'(G) \leq 4$$

### Aufgabe 54

Sei  $D$  ein gerichteter Graph. Definiere  $\Delta^-(D) := \max_{v \in V} |\delta^-(v)|$  und  $\Delta^+(D) := \max_{v \in V} |\delta^+(v)|$ . Wir nennen eine Kantenfärbung  $c$  *gerichtet zulässig*, falls

$$c(e) = c(f) \quad \Rightarrow \quad \nexists v \in V : e, f \in \delta^-(v) \vee e, f \in \delta^+(v).$$

Das heißt in einer gerichtet zulässigen Färbung sind für jeden Knoten jeweils die Farben aller eingehenden und die aller ausgehenden Kanten paarweise verschieden. Es bezeichne  $\overleftarrow{\chi}(D)$  die minimale Anzahl Farben, die notwendig ist, um  $D$  gerichtet zulässig zu färben.

Zeige:

$$\overleftarrow{\chi}(D) = \max\{\Delta^-(D), \Delta^+(D)\}$$

### Aufgabe 55

Sei  $G$  ein  $k$ -regulärer Graph mit  $\chi'(G) = k$ . Zeige:

- Für jedes  $1 \leq \ell \leq k$  hat  $G$  einen  $\ell$ -regulären Untergraphen.
- Ist  $k$  gerade, so gibt es eine Partition der Kanten von  $G$  in gerade Kreise.