Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Stefan Felsner
Felix König

Graphentheorie (DS II)
Wintersemester 2007/2008

5. Übungsblatt

Besprechung: Mittwoch, 21.11.2007, in der Übung

Relevante Aufgaben: 4

Aufgabe 26

Sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten. Zeige:

$$\alpha(G) \leq n - \frac{m}{\Delta(G)}$$

Aufgabe 27

Zeige, dass die Schranke

$$\sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)+1} \leq \alpha(G)$$

beliebig schlecht sein kann.

Wie verhält sich die Schranke für reguläre Graphen?

Aufgabe 28

a) Sei $p := (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ eine Permutation von $[n]$. Ein $i \in [n]$ heißt *Fixpunkt* von p, falls $\pi(i) = i$. Wie hoch ist die erwartete Anzahl von Fixpunkten einer zufälligen Permutation?

b) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und E ein perfektes Matching auf V. Wie hoch ist die erwartete Anzahl von Kanten in einem zufälligen induzierten Subgraphen von G mit k Knoten?

Aufgabe 29

Bezeichne $R(H_1, H_2)$ die Anzahl Knoten, die ein vollständiger Graph G mindestens haben muss, damit er bei beliebiger Färbung seiner Kanten mit den Farben rot und blau einen H_1 als Subgraphen mit nur roten oder einen H_2 als Subgraphen mit nur blauen Kanten hat.

Zeige, dass für jeden Baum T mit t Knoten

$$R(T, K_s) = (t-1)(s-1) + 1$$

gilt.

(Tipp: Zeige zunächst, dass es eine Färbung der Kanten des $K_{(t-1)(s-1)}$ gibt, die die Voraussetzung nicht erfüllt. Beweise dann die Existenz von H_1 und H_2 wie gefordert für eine beliebige Färbung des $K_{(t-1)(s-1)+1}$.)

Aufgabe 30

Zeige: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jede Partition von $[n]$ in k Teilmengen mindestens eine der Teilmengen x, y, z mit $x + y = z$ enthält.

(Tipp: Betrachte eine durch die Partition induzierte k-Färbung der Kanten des vollständigen Graphen mit Knotenmenge $[n]$ und verwende den Satz von Ramsey.)

Aufgabe 31

Gegeben sei eine beliebige n-Färbung der Kanten des K_{2n+1}. Zeige: Der Graph enthält einen monochromen Kreis.