TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik

Prof. Stefan Felsner
Felix König

Graphentheorie (DS II)
Wintersemester 2007/2008

3. Übungsblatt

Besprechung: Mittwoch, 7.11.2007, in der Übung

Relevante Aufgaben: 5

Aufgabe 15

Sei $\phi_q(n,k)$ die Anzahl der k-dimensionalen Unterräume des n-dimensionalen Vektorraums über dem $\mathbb{F}_q$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\phi_q(n,1) = q^2 + q + 1$. Beweise folgende Rekursionsformel:

$$\phi_q(n+1,k) = \phi_q(n,k) + q^{n+1-k} \cdot \phi_q(n,k-1).$$

Beachte dabei die Ähnlichkeit zur Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten.

Aufgabe 16

Das q-Analogon von n ist definiert als

$$[n]_q := \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Weiter seien

$$[n]_q! := \prod_{i=1}^{n} [i]_q$$

und

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}.$$

Zeige:

$$\phi_q(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Aufgabe 17

Sei $G = (V,E)$ zusammenhängend. Zeige, dass es eine Teilmenge $E' \subseteq E$ der Kanten von G gibt, so dass in $G' := (V,E')$ alle Knoten bis auf höchstens einen ungeraden Grad haben.

Aufgabe 18

Sei G ein zusammenhängender Graph. Beweise, dass G entweder vollständig ist oder einen Pfad der Länge $\delta(G)+1$ enthält.

Aufgabe 19

a) Zeige, dass für jeden Graph G der Graph selbst oder sein Komplement $\bar{G}$ zusammenhängend ist.

b) Zeige, dass ein Graph G mit mindestens drei Knoten und sein Komplement $\bar{G}$ keinen gemeinsamen Separator S mit weniger als $n-1$ Knoten haben.

Aufgabe 20

Zeige:

$$(d_1, \ldots, d_n) \text{ ist Gradfolge eines Baumes} \iff \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$