

## 2. Übungsblatt

Besprechung: Mittwoch, 31.10.2007, in der Übung

Relevante Aufgaben: 5

### Aufgabe 7

Sei  $k \leq n - 1$ . Zeige:

$$kn \text{ ist gerade} \iff \exists \text{ einfacher } k\text{-regulärer Graph } G \text{ mit } n \text{ Knoten}$$

Benutzt nicht den Satz von Erdős und Gallai.

### Aufgabe 8

Gibt es einfache Graphen mit streng monotonen Gradfolgen?

### Aufgabe 9

Sei  $G$  ein Graph mit girth (kürzester Kreislänge) fünf. Bezeichne  $\delta(G)$  seinen Minimalgrad. Zeige:

$$\delta(G) = k \implies |V(G)| \geq k^2 + 1$$

Finde je einen Graphen für  $k = 2$  und  $k = 3$  mit genau  $k^2 + 1$  Knoten.

(Zusatz: Zeige, dass es für  $k = 4$  kein solches Beispiel gibt.)

### Aufgabe 10

Sei  $A$  die Adjazenzmatrix eines Graphen  $G$ . Was bedeuten die Einträge von  $A^k$ ?

### Aufgabe 11

Das Komplement  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  eines Graphen  $G = (V, E)$  ist definiert durch

$$\bar{E} := \{(v, w) \in V \times V : (v, w) \notin E\}.$$

$G$  heißt selbstkomplementär, wenn  $G$  isomorph zu  $\bar{G}$  ist.

Zeige: Es gibt einen selbstkomplementären Graphen mit  $n$  Knoten genau dann, wenn  $n$  oder  $n - 1$  durch vier teilbar ist.

### Aufgabe 12

- a) Zu einer endlichen Menge  $A$  von natürlichen Zahlen definiere einen Graphen  $J_A = (A, E)$  durch

$$E := \{(a, b) \in A \times A : \text{ggT}(a, b) > 1\}.$$

Existiert zu jedem endlichen Graphen  $G$  eine Menge  $A$  von natürlichen Zahlen, so dass  $G$  isomorph zu  $J_A$  ist?

- b) Zu einer endlichen Menge  $A$  von natürlichen Zahlen definiere einen Graphen  $H_A = (A, E)$  durch

$$E := \{(a, b) \in A \times A : a \text{ teilt } b \text{ oder } b \text{ teilt } a\}.$$

Existiert zu jedem endlichen Graphen  $G$  eine Menge  $A$  von natürlichen Zahlen, so dass  $G$  isomorph zu  $H_A$  ist?

### Aufgabe 13

Gegeben sei folgende Familie von Graphen  $G_k = (V_k, E)$ :

$$V_k := \{A : A \text{ ist } k\text{-elementige Teilmenge von } [2k + 1]\}$$

$$E := \{(A, B) \in V \times V : A \cap B = \emptyset\}.$$

Insbesondere ist also  $G_2$  der Petersen-Graph. Zeige für  $k \geq 3$ , dass die girth von  $G_k$  mindestens sechs ist.

### Aufgabe 14

Untersuche welche der folgenden Graphen isomorph zueinander sind:

