8. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Diskrete Strukturen II - Graphentheorie 7. Dezember 2005

Abgabe: 16. Dezember 2005

relevante Aufgabenzahl: **4**

---

(43) (a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichtsfunktion c. Seien A und B minimal aufspannende Bäume von G. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : E(A) \to E(B)$ mit $c(e) = c(\varphi(e))$.
(b) Ist G ein zusammenhängender Graph, in dem je zwei Kanten unterschiedliches Gewicht haben, so besitzt G einen eindeutigen minimal aufspannenden Baum.

(44) Wir modellieren ein Telekommunikationsnetzwerk durch einen Graphen $G = (V, E)$, dessen Kanten voneinander unabhängige Ausfallwahrscheinlichkeiten $p : E \to [0, 1]$ haben. Wie findet man in $O(m + n \log n)$ einen aufspannenden Baum, der die Wahrscheinlichkeit, dass alle seine Kanten funktionieren, maximiert?

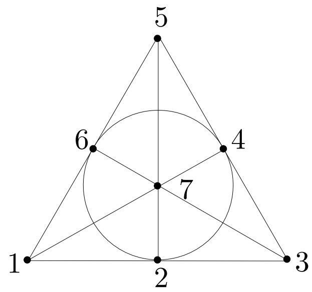
(45) Zeige, dass jedes graphische Matroid ein lineares Matroid ist.

(46) (a) Zeige, dass die unabhängigen Mengen eines Graphen im Allgemeinen nicht die unabhängigen Mengen eines Matroids sind.
(b) Charakterisiere die Graphen, deren unabhängige Mengen die unabhängigen Mengen eines Matroids sind.

(47) Das Fano-Matroid ist das Matroid $M = (S, C)$ auf der Menge $S = \{1, \dots, 7\}$, dessen Kreise C gegeben sind durch

$$\{\{1, 2, 3\}\{3, 4, 5\}\{1, 5, 6\}\{1, 4, 7\}\{2, 5, 7\}\{3, 6, 7\}\{2, 4, 6\}\}$$

sowie alle 4-elementigen Teilmengen von S, die nicht eine der oben genannten 3-elementigen Teilmengen enthalten. Zeige, dass dies ein Matroid ist, charakterisiere die Basen und zähle sie ab.



(48) Zeige, dass das Kreisaxiom (C_2) aus den Matroidaxiomen folgt. (Hinweis: Führe einen Widerspruchsbeweis unter der Annahme, dass $(C \cup C') \setminus \{z\}$ unabhängig ist, benutze, dass $C \cap C'$ unabhängig ist und wende wiederholt das Matroidaxiom (I_2) an).

(49) Sei B eine Basis eines Matroids M und $x \in B, y \in M \setminus B$. Zeige
(i) $B \cup \{y\}$ enthält einen eindeutigen Kreis C_y (Hinweis: Verwende das Kreisaxiom (C_2));
(ii) $y \in C_y$;
(iii) $(B \cup \{y\}) \setminus \{x'\}$ ist eine Basis von M genau dann, wenn $x' \in C_y$.