7. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Diskrete Strukturen II - Graphentheorie 30. November 2005

Abgabe: 9. Dezember 2005

relevante Aufgabenzahl: **4**

---

(37) Sei $T_1, \ldots, T_n$ eine Pflasterung des Rechtecks $[0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$. Zeige, dass wenn alle T_i 0, 2 oder 4 Ecken in $\mathbb{Z}^2$ haben, a oder b ganzzahlig ist.

(38) Sei W ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$, U ein Unterraum von W. Zeige:
(a) $U^\perp$ ist ein Unterraum von W.
(b) $dim(U) + dim(U^\perp) = dim(W)$

(39) Betrachte eine planare Einbettung eines 2-zusammenhängenden Graphen G. Zeige, dass die Ränder aller endlichen Länder eine Basis des Zyklenraums bilden. (Wo wird der Jordansche Kurvensatz benutzt?).

(40) Die Inzidenzmatrix B eines Graphen $G = (V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E = \{e_1, \ldots, e_m\})$ hat n Zeilen und m Spalten. Der Eintrag b_{ij} ist 1, wenn $v_i \in e_j$, ansonsten 0.
(a) Zeige, dass der Zyklenraum der Kern der durch B definierten Abbildung vom Kantenraum in den Knotenraum ist.
(b) Zeige, dass der Schnittraum das Bild der durch B^t definierten Abbildung vom Knotenraum in den Kantenraum ist.

(41) In der Vorlesung wurde der Knotenraum (bzw. Kantenraum) als Menge aller Abbildungen von der Knotenmenge (bzw. Kantenmenge) eines Graphen nach $\mathbb{F}_2$ definiert. Erweitere diese Definitionen auf $\mathbb{C}$.
Ordne jeder Kante e_i eine Richtung zu und jedem gerichteten Zykel L ein Element z_L des Kantenraums:

$$z_L(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } e_i \in L \text{ und } e_i \text{ wie } L \text{ orientiert ist} \\ -1 & \text{wenn } e_i \in L \text{ und } e_i \text{ entgegengesetzt } L \text{ orientiert ist} \\ 0 & \text{wenn } e_i \notin L \end{cases}$$

Unter dem Zyklenraum versteht man auch hier den von den z_L erzeugten Raum, wobei L alle Zyklen durchläuft. Was stellen die Elemente des Zyklenraums im Graphen dar?
Der Schnittraum sei als das orthogonale Komplement des Zyklenraums definiert. Gib ein Erzeugendensystem des Schnittraums an.

(42) Definiere die Inzidenzmatrix eines Graphen so, dass die Resultate aus Aufgabe 40 mit den nach Aufgabe 41 erweiterten Definitionen Ihre Gültigkeit behalten.