

GRAPHENTHEORIE

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung und erste Definitionen	2
1.1. Warum Graphentheorie?	2
1.2. Was ist ein Graph?	3
1.3. Graphen als Modell	3
1.4. Färbungsprobleme	6
1.5. Matrizen und Isomorphie	7
1.6. Der Petersen-Graph und Kneser-Graphen	9
2. Der Grad eines Graphen	10
2.1. Gleichungen und Ungleichungen	10
2.2. Hyperwürfel	10
2.3. Gradfolgen (Havel-Hakimi)	12
3. Wege und Kreise	16
3.1. Euler-Kreise	17
3.2. Abstand, zentrale Knoten und Radius	18
4. Zusammenhang	18
4.1. Separator	19
4.2. Schnitt	20
5. Wälder und Bäume	22
5.1. Charakterisierungen von Bäumen	22
5.2. Aufspannende Bäume	23
5.3. Satz von Cayley	25
5.4. Bipartite und multipartite Graphen	27
6. Maximale Kantenzahlen	27
6.1. Dreiecksfreie Graphen	28
6.2. Der Satz von Turan	29
6.3. Eine Schranke für $\alpha(G)$	33
7. Elektrische Netze	35
7.1. Kirchhoffsche Gesetze	36
7.2. Ein Beispiel mit Lösungsstrategie	36
7.3. Serien-Parallele Netze (Problemreduzierung)	38
7.4. Existenz von Lösungen	41
7.5. Squaring a square	43
7.6. Pflasterungen (Tilings)	44
8. Kreise, Schnitte, Vektorräume	47
8.1. Knoten- und Kantenraum	47
8.2. Zyklenraum	47
8.3. Schnittraum	48
9. Minimal aufspannende Bäume	51
9.1. Färbungsregeln:	51
9.2. Algorithmen	53
10. Matroide	54
10.1. Axiome für unabhängige Mengen	54
10.2. Beispiele	55
10.3. Der Matroid-Greedy-Algorithmus	56

10.4.	Begriffe und Axiomensysteme	57
10.5.	Dualität	58
10.6.	Minoren	61
10.7.	Schnitt-Matroide	61
11.	Planare Graphen	61
11.1.	Definitionen und Jordanscher Kurvensatz	61
11.2.	Duale Graphen	63
11.3.	Schnitte und Kreise in G und G^*	64
11.4.	Minoren von Graphen	65
11.5.	Sätze von Wagner und Robertson&Seymour	66
11.6.	Charakterisierung planarer Graphen über Matroide	66
11.7.	Die Euler-Formel	68
11.8.	Satz von Kuratowski	70
11.9.	Konvexe Zeichnungen	72
11.10.	Outerplanare Graphen	74
12.	Graphenfärbungen	75
12.1.	Definitionen und einfache Beobachtungen	75
12.2.	Greedy-Färbungen	76
12.3.	Degeneriertheit	77
12.4.	Art Gallery Theorem	77
12.5.	Färbung planarer Graphen	79
12.6.	Kempes falscher 4-Farben-Beweis	79
12.7.	Plan für einen richtigen Beweis	80
12.8.	Kantenfärbung nach Tait	84
12.9.	Graphen auf Flächen	88
12.10.	Satz von Brooks	91
12.11.	Vermutungen von Hadwiger und Hajos	92
13.	Zählen von Färbungen	92
13.1.	Azyklische Orientierungen	95
13.2.	Fraktionale Färbungen	96
13.3.	Untere Schranken	98
13.4.	LP-Formulierung	99
13.5.	Färbungen und Homomorphismen	100
13.6.	Verallgemeinerung von Färbungen	100
14.	Kneser-Graphen	101
14.1.	Die fraktionale chromatische Zahl von K_b^t	101
14.2.	Die chromatische Zahl von Kneser-Graphen	103
15.	Perfekte Graphen	104
15.1.	Klassen perfekter Graphen	105
15.2.	Das Perfekt-Graph-Theorem	107
15.3.	Triangulierte Graphen	110
15.4.	Durchschnittsgraphen	112

1. EINFÜHRUNG UND ERSTE DEFINITIONEN

1.1. **Warum Graphentheorie?** Graphen werden in der Praxis häufig als Modell verwendet, um Probleme zu lösen. Hier einige Beispiel dafür:

- (1) Verbindungsnetz minimaler Kosten
- (2) schnellste Verbindungen
- (3) n Jobs, m Arbeitssuchende; gesucht ist die maximale Produktivität
- (4) Spielplan einer Sportliga

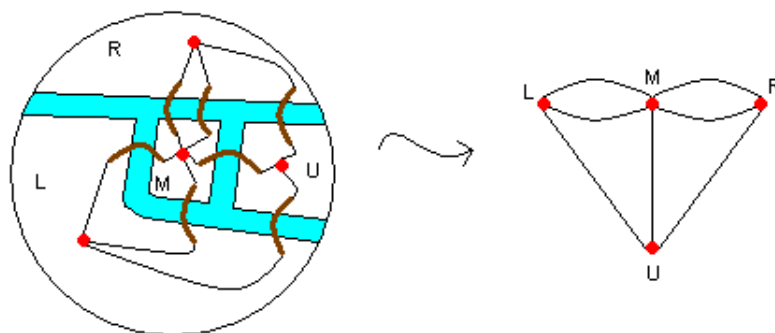


ABBILDUNG 1. Stadtplan von Königsberg; Modellierung als Graph

(5) Färben von Landkarten

Historisch gesehen beginnt die Graphentheorie im Jahr 1736, als Euler sein Königsberger Brückenproblem vorstellt.

Example 1.1. Das Brückenproblem:

Euler stellt sich in Königsberg folgende Frage: er möchte einen Sonntagsspaziergang machen und dabei jede der Brücken genau einmal überqueren. Ist dies möglich? Er kommt zu dem Schluss, dass es keinen solchen Spaziergang gibt, und er kann seine Aussage sogar verallgemeinern. Wenn es einen Spaziergang geben soll, dann muss in dem Brückenmodell an jedem Knoten eine gerade Anzahl von Kanten liegen. Diese Bedingung stellt sich später auch als hinreichend heraus.

1.2. Was ist ein Graph?

Definition 1.2. Ein *einfacher Graph* $G = (V, E)$ besteht aus *Knoten* (Ecken) V und *Kanten* (Bögen) E , die jeweils zwei Knoten verbinden. Eine *Multikante* besteht zwischen zwei Knoten u, v , wenn nicht nur eine Kante, sondern mehrere Kanten zwischen ihnen liegen. Eine *Schlinge* ist eine Kante mit dem gleichen Anfangs- und Endknoten.

Note. Zwei kurze Bemerkungen

- (1) Ein einfacher Graph besitzt keine Mehrfachkanten und Schlingen.
- (2) In einem einfachen Graphen $G = (V, E)$ gilt: die Anzahl der Kanten $|E| \leq \binom{|V|}{2}$, die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von V .

Example 1.3.

Mengen-Darstellung:

$$V = \{a, b, c, d\}, E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \dots, \{c, d\}\}$$

Die graphische Darstellung eines Graphen ist fast nie eindeutig. Deswegen ist es gefährlich über "wie man in dem Graphen sieht" Beweise zu führen.

1.3. **Graphen als Modell.** Im Folgenden betrachten wir drei Probleme, die mit Hilfe der Graphentheorie gelöst werden und stellen anhand dieser Beispiele allgemeine Definitionen auf.

Erstes Problem: Gibt es in jeder Menge von sechs Personen drei, die sich paarweise kennen, oder drei, die sich paarweise nicht kennen? Mit Graphen formuliert ergibt sich folgendes Modell. Die Knoten repräsentieren die Personen und eine Kante zwischen zwei Personen bedeutet, dass sich die jeweiligen Personen kennen. Die

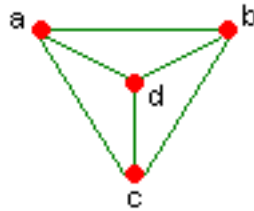


ABBILDUNG 2. Graphische Darstellung

Frage des Kennens wird formuliert als: Gibt es auf sechs Knoten immer ein Dreieck (drei Personen kennen sich paarweise) oder drei Knoten, die nicht verbunden sind?

Definition 1.4. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Das *Komplement* \bar{G} von G ist der Graph $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \binom{V}{2} - E$.

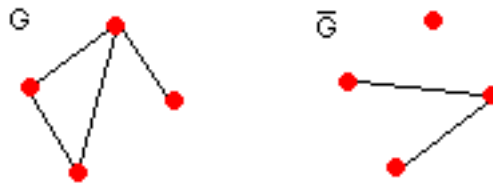


ABBILDUNG 3. Beispiel für Graphen G und sein Komplement

Definition 1.5. Eine *Clique* in $G = (V, E)$ ist ein Teilmenge $W \subseteq V$ mit $E \cap \binom{W}{2} = \binom{W}{2}$. Jedes Paar von Knoten aus W ist benachbart, wobei zwei Knoten a, b benachbart heißen, wenn die Kante $(a, b) \in E$. W induziert einen vollständigen Graphen.



ABBILDUNG 4. Eine 4-Clique im Graphen G sind die roten Knoten

Definition 1.6. Der von $W \subseteq V$ in $G = (V, E)$ induzierte (Sub-) Graph ist $G_W = (W, E_W)$ mit $E_W = E \cap \binom{W}{2}$.



ABBILDUNG 5. Ein durch W (rote Knoten) induzierter Subgraph

Definition 1.7. Eine *unabhängige Menge* (*Anticlique*) in $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $W \subseteq V$ mit $E \cap \binom{W}{2} = \emptyset$. Kein Paar von Knoten aus W ist benachbart. Die Menge W ist eine Clique in \overline{G} .

ABBILDUNG 6. W (rote Knoten) bildet eine unabhängige Menge in G

Neu formuliert war unsere Frage also: enthält jeder Graph mit sechs Knoten eine Clique oder eine unabhängige Menge der Größe drei?

Zweites Problem: Es stehen n Jobs J und m Personen P zur Verfügung. Die Person $p \in P$ ist qualifiziert für die Menge $J_p \subseteq J$ von Jobs. Gibt es eine Zuordnung $z : P \rightarrow J$, so dass $\forall j \in J$ gilt: $\exists p$ mit $z(p) = j$ und $j \in J_p$.

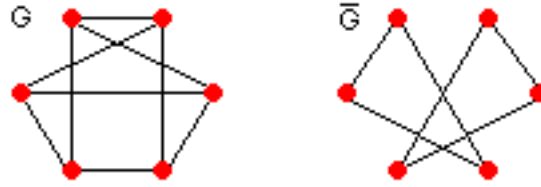


ABBILDUNG 7. G enthält kein Dreieck, dafür aber \bar{G}



ABBILDUNG 8. Die Jobs J werden durch die oberen Knoten dargestellt, die Personen P durch die unteren Knoten. Zwischen einem Job j und einer Person p gibt es eine Kante, wenn $j \in J_p$.

Definition 1.8. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn $V = M \cup W$ mit $M \cap W = \emptyset$, so dass $\forall e \in E$ gilt: $e \cap M \neq \emptyset$ und $e \cap W \neq \emptyset$.

Die Knotenmenge des Graphen lässt sich also in zwei disjunkte Mengen M und W aufteilen, und es gibt keine Kante, die von einem Knoten aus M bzw. W zu einem Knoten in M bzw. W geht.

Drittes Problem: Nach der Bundestagswahl müssen sich Ausschüsse immer montags um 12.00 Uhr konstituieren. Alle Mitglieder müssen anwesend sein, damit ein Ausschuss gebildet werden kann. Allerdings sind einige Mitglieder in mehreren Ausschüssen. Wieviele Wochen braucht man, damit sich auch der letzte Ausschuss konstituiert hat?

Modelliert wird dieses Problem folgendermaßen: Jeder Ausschuss wird durch einen Knoten dargestellt und es gibt eine Kante zwischen zwei Ausschüssen, wenn sie ein gemeinsames Mitglied haben. Gesucht ist dann eine Zerlegung von V , so dass alle Mengen unabhängig sind. Dabei soll die Anzahl der Mengen minimal sein.

1.4. Färbungsprobleme.

Definition 1.9. Die *chromatische Zahl (Färbungszahl)* $\chi(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die minimale Anzahl von Teilen in einer Partition von V , in der jedes Teil eine unabhängige Menge ist. d.h. Wir suchen ein minimales k , so dass k Partitionen V_1, \dots, V_k von V existieren, die unabhängig voneinander sind. Wenn eine solche Zahl existiert, nennt man G auch *k-partit*. Eine *k-Färbung* ist eine Abbildung $c : V \rightarrow F$ mit $|F| = k$ und $c^{-1}(f)$ ist unabhängig für jedes $f \in F$.

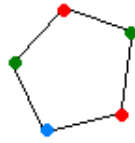


ABBILDUNG 9. Der Graph G kann mit drei Farben in disjunkte Mengen unterteilt werden. Er ist also 3-partit.

Wir betrachten nun kurz einige wichtige Graphen:

Beschreibung	Bezeichnung	Beispiel
n -Pfad	P_n	
n -Kreis	C_n	
vollständiger Graph auf n Knoten	$K_n = \left([n], \binom{[n]}{2} \right)$	
vollständig bipartiter Graph mit Teilen der Größe m und n	$K_{m,n}$	

1.5. Matrizen und Isomorphie.

Definition 1.10. Die Adjazenzmatrix $A(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Matrix, deren Zeilen und Spalten durch V induziert sind mit

$$a_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v, w) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Note. Bei der Bildung von $A(G)$ nimmt man typischerweise die gleiche "Ordnung" für die Zeilen und Spalten. Die Matrix $A(G)$ ist dann symmetrisch.

Example 1.11. Betrachten wir den Graphen G . Seine Adjazenzmatrix kann auf unterschiedliche Art (abhängig von der Ordnung der Knoten) dargestellt werden.

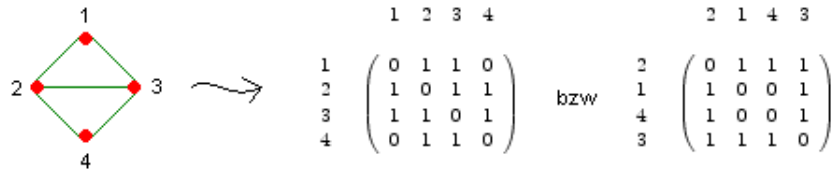


ABBILDUNG 10. Der Graph G und zwei dazugehörige Adjazenzmatrizen

Definition 1.12. Die Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ sind isomorph zueinander genau dann, wenn eine Abbildung $\pi : V \rightarrow V'$ existiert, die bijektiv ist mit $(v, w) \in E \Leftrightarrow (\pi(v), \pi(w)) \in E'$.

Alternativ kann man isomorph definieren als: $G \simeq G' \Leftrightarrow \exists$ Permutationsmatrix P_π mit $A(G) = P_\pi \cdot A(G') \cdot P_\pi^{-1}$.

Example 1.13. Betrachten wir noch mal das Beispiel oben, dann führt die Matrix P_π die beiden Adjazenzmatrizen ineinander über.

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ABBILDUNG 11. Die Permutations-Matrix P_π

Proposition 1.14. Die Isomorphie bildet eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Graphen.

Beweis. klar... □

Die Klassen der Äquivalenzrelation sind unbezeichnete Graphen (unlabelled Graph), d.h. die Knoten sind nicht nummeriert und man kann zwei bezeichnete Graphen (mit Nummern) durch Umnummerierung ineinander überführen.

Example 1.15. Hier sind die Äquivalenzklassen aller Graphen mit drei Knoten dargestellt.

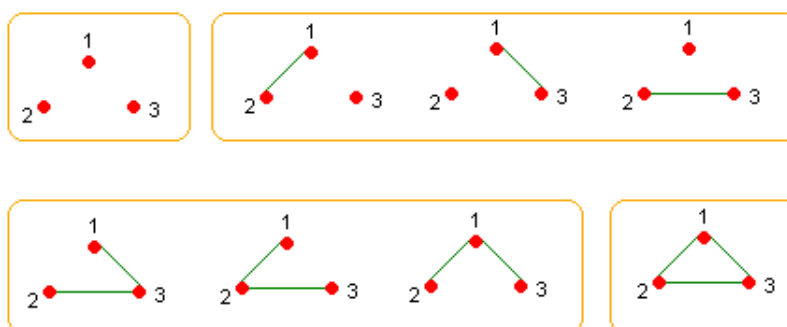


ABBILDUNG 12. Isomorphe Graphen sind jeweils eingerahmt

Es stellt sich nun die Frage: wieviele unterschiedliche Graphen gibt es? Auf $|V| = n$ gibt es $2^{\binom{n}{2}}$ bezeichnete Graphen (für jede Teilmenge von $\binom{n}{2}$ einen). Das Zählen von Isomorphieklassen (unbezeichnete Graphen) ist viel schwieriger.

unbez.	1	2	4	11	34	156
bez.	1	2	8	64	1024	$\sim 32 \cdot 10^3$

1.6. Der Petersen-Graph und Kneser-Graphen.

Definition 1.16. Der Petersen-Graph besteht aus $V = \binom{[5]}{2}$ Knoten und für die Kanten gilt $E = \{\text{disjunkte Paare von 2-Mengen}\}$.

Example 1.17. Beispiele zur graphischen Darstellung des Petersen-Graphen.

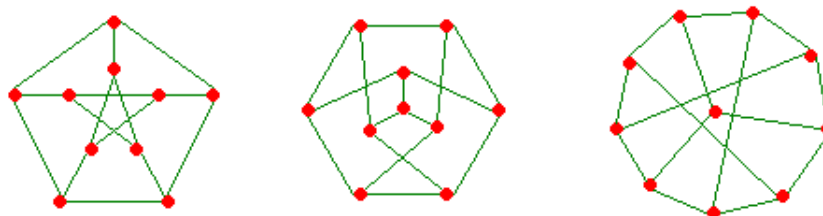


ABBILDUNG 13. Verschiedene Zeichnungen des Petersen-Graphen

Lemma 1.18. Je zwei nicht benachbarte Knoten in einem Petersen-Graphen haben genau einen gemeinsamen Nachbarn.

Beweis. Wir bezeichnen die Knoten des Petersen-Graphen als Tupel (a, b) mit $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $a \neq b$. Seien v und w zwei nicht benachbarte Knoten, d.h. sie müssen eine Zahl aus $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ gemeinsam haben, sonst würde nach Def. des Petersen-Graphen eine Kante zwischen ihnen existieren. Sei o.B.d.A. $v = (a, b)$ und $w = (a, c)$. Der einzige Nachbar, den beide gemeinsam haben können ist dann der Knoten $z = (d, e)$, weil die Nachbarn von v nur aus Kombinationen von c, d, e und die Nachbarn von w nur aus Kombinationen von b, d, e bestehen können. \square

Im Petersen-Graphen gibt folgende Kreise:

Kreislänge	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl	0	0	12	10	0	15	10	0

Definition 1.19. Mit *girth* (*Tailenweite*) eines Graphen G bezeichnet man die Länge seines kürzesten Kreises.

Eine Verallgemeinerung des Petersen-Graphen bekommen wir mit den Kneser-Graphen:

Definition 1.20. Sei $n, a \in \mathbb{N}$ und $a < n$, dann hat der Kneser-Graph $K(n, a)$ eine Knotenmenge von $V = \binom{[n]}{a}$ und $E = \{\text{disjunkte Paare von } a\text{-Mengen}\}$.

Note. Der Petersen-Graph ist ein Kneser Graph mit $n = 5$ und $a = 2$.

Example 1.21. Der Knesergraph $K(n, 1)$ ist isomorph zum vollständigen Graphen K_n .

2. DER GRAD EINES GRAPHEN

Definition 2.1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die *Nachbarschaft* eines Knotens v ist $N(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$. Der *Grad* eines Knotens v ist $d(v) = |N(v)|$ (bei Multigraphen: Anzahl der inzidenten Kanten). Den *Maximalgrad* bezeichnen wir mit $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$ und den *Minimalgrad* mit $\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$. Der Graph G heißt *k-regulär*, wenn $d(v) = k \forall v \in V$.

2.1. Gleichungen und Ungleichungen.

Lemma 2.2. In einem Graphen G ist die Summe über den Grad der Knoten gleich der doppelten Anzahl von Kanten in G .

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Beweis. Wir benutzen die Technik des ‘‘doppelten Zählens’’: Zähle alle Knoten-Kanten-Paare (v, e) mit $v \in e$. Daraus folgt: Für jedes v gibt es $d(v)$ viele, also $\sum_{v \in V} d(v)$, für jedes e gibt es zwei Knoten, die dranhängen, also $2|E|$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Corollary 2.3. Einige Eigenschaften von Gradzahlen

(1) Es gilt folgende Relation:

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

$\frac{2|E|}{|V|}$ bezeichnet man auch als ‘‘mittleren Grad’’

- (1) Falls G k -regulär ist, folgt $|E| = \frac{k \cdot |V|}{2}$. Daraus folgt sofort: ist ein Graph G k -regulär, dann muss entweder k oder $|V|$ gerade sein.
- (2) Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist immer gerade.

2.2. Hyperwürfel.

Definition 2.4. Der k -Hyperwürfel (k -dim Würfel) Q_k hat alle 0-1-Vektoren der Länge k als Knoten, und Kanten bestehen zwischen zwei Knoten, die sich genau in einer Koordinate unterscheiden.

Example 2.5. Der 2-Würfel und der 3-Würfel haben die Form, wie wir sie kennen.

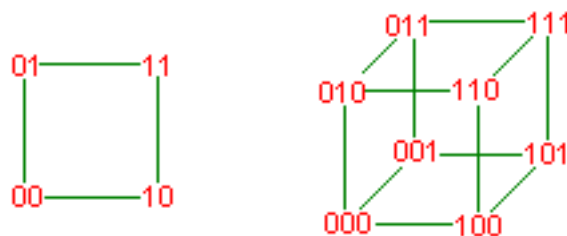


ABBILDUNG 14. Der 2-Würfel und der 3-Würfel

Proposition 2.6. Der k -Hyperwürfel Q_k hat folgende Eigenschaften

- (1) Für die Anzahl der Knoten gilt: $|V| = 2^k$.
- (2) Q_k ist k -regulär und damit ist die Anzahl der Kanten gleich $|E| = \frac{k \cdot 2^k}{2} = k \cdot 2^{k-1}$.
- (3) Der Würfel Q_k ist bipartit. Jede Kante verbindet einen Knoten mit gerader "Koordinatensumme" und einen mit ungerader. Die Farbklassen sind dann:

$$V_0 = \{x \in V(Q_k) \mid \sum x_i \text{ gerade}\}$$

$$V_1 = \{x \in V(Q_k) \mid \sum x_i \text{ ungerade}\}$$

Hier sind einige Beispiele für k -reguläre Graphen:

k-regulär	Beispiel	Beschreibung
k=0		$\forall n$ gibt es genau einen Graphen: $\overline{K_n}$
k=1		nur für gerade Knotenzahl, die Graphen sind eindeutig
k=2		Kreise und Vereinigungen von Kreisen
k=3		unterschiedlich

Theorem 2.7. *Der Graph G ist genau dann 3-regulär und 3-zusammenhängend (d.h. man muss 3 Knoten rausnehmen, damit der Graph zerfällt) wenn G aus dem K_4 durch eine Folge von Operationen ("joinings") erzeugt werden kann.*



ABBILDUNG 15. Die Operation "joining" funktioniert, wie im Bild angedeutet.

Example 2.8. Hier wird der $K_{3,3}$ aus dem K_4 durch joinings gebildet.

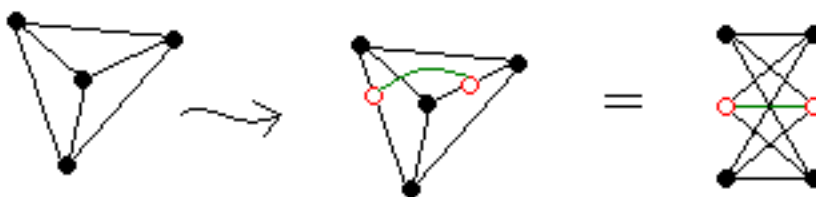


ABBILDUNG 16. Der $K_{3,3}$ wird aus dem K_4 gebildet.

2.3. Gradfolgen (Havel-Hakimi). Wir stellen uns die Frage, ob es zu einer gegebenen Gradfolge einen Graphen bzw. Multigraphen gibt.

Proposition 2.9. *Sei d_1, d_2, \dots, d_n eine Folge von ganzen Zahlen. Dies ist genau dann die Gradfolge eines Multigraphen, wenn $\sum_{i=1}^n d_i$ gerade ist.*

Beweis. " \Rightarrow " siehe Lemma 2.2

" \Leftarrow " Sei d_1, \dots, d_n eine Folge mit $\sum d_i \equiv 0 \pmod{2}$. Sei o.B.d.A $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.

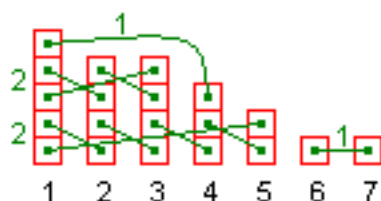


ABBILDUNG 17. Beispiel einer Gradfolge und der Schritte 1 und 2

1. Schritt: paare Knoten mit ungeradem Grad. Für jeden Knoten mit ungeradem Grad gibt es einen Partner, weil sonst die Summe über die Gradzahlen nicht gerade wäre.

2. Schritt: Verbinde die anderen Knoten durch Kreise, bis jeder Knoten die benötigte Anzahl von Kreisen hat. Oder: Betrachte den Knoten x_i mit geradem Grad d_i . Sei $s_i = \frac{d_i}{2}$. Füge in den Graphen s_i Schleifen an den Knoten x_i . Der Knoten hat nun die gewünschte Gradzahl. Hat der Knoten x_i eine ungerade Gradzahl, so ist er bereits mit einem anderen Knoten, der ebenfalls eine ungerade Gradzahl hatte, verbunden. Die verbleibende Gradzahl ist gerade. \square

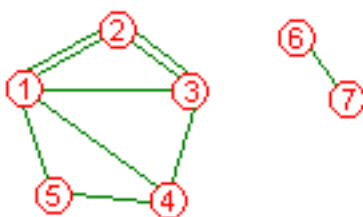


ABBILDUNG 18. Ein Multigraph, der aus obiger Gradfolge entsteht.

Um zu bestimmen, ob eine Gradfolge zu einem Graphen gehört, gibt es ein rekursives Verfahren von Havel-Hakimi.

Theorem 2.10. [Havel-Hakimi] Die Gradfolge $d = (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$ ist genau dann graphisch (d.h. kommt von einem einfachen Graphen) wenn die Gradfolge $d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ graphisch ist.

Note 2.11. Die Gradfolge d' entsteht also durch Löschen von d_1 und Vermindern der ersten d_1 der verbleibenden Folglieder um 1.

Beweis. " \Leftarrow " Sei $G' = (\{v_2, \dots, v_n\}, E')$ ein Graph mit der Gradfolge d' . Definiere eine Kantenmenge E über v_1, \dots, v_n Knoten folgendermaßen: $E = E' \cup \{(v_1, v_i) \mid 2 \leq i \leq d_1 + 1\}$. Es wird also jedem Knoten v_i , $i = 2, \dots, d_1 + 1$ aus dem Graphen G' eine weitere Kante zugefügt und dem Knoten v_1 werden d_1 Kanten hinzugefügt. Damit erhalten wir einen neuen Graphen $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ mit der Gradfolge d .

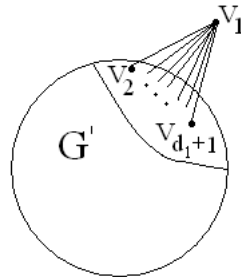


ABBILDUNG 19. Dem Graphen G' wird noch ein Knoten und d_1 Kanten hinzugefügt.

” \Rightarrow ” Sei $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ ein Graph mit der Gradfolge d und $d(v_i) = d_i, i = 1, \dots, n$. Sei $W = N(v_1)$ die Menge der Nachbarn von v_1 .

Fall I: Sei die Menge der Nachbarn $W = \{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$. Dann hat der Graph G' , der aus $G - v_1$ (der Löschung von v_1 mit sämtlichen Kanten, die von v_1 gehen) entsteht, die Gradfolge d' .

Fall II: Sei $W \neq \{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$. Dann gibt es einen Knoten v_i mit $i \leq d_1 + 1$ und $v_i \notin W$ und es gibt einen Knoten $w \in W$ mit $w \notin \{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$. Idee: der Knoten v_i soll in die Menge W und der Knoten w soll aus der Menge W raus. Wegen $d(v_i) \geq d(w)$ und $v_1 \in N(w)$ hat w in der Menge $V \setminus \{v_1\}$ weniger Nachbarn als v_i . Es gibt also einen Nachbarn v^* von v_i , der nicht Nachbar von w ist.

Wir ersetzen nun in G die Kanten (v_1, w) und (v_i, v^*) durch die Kanten (v_1, v_i) und (w, v^*) . Dabei bleiben die Grade aller Knoten gleich.

Die Menge $N(v_1) \cap \{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$ ist gewachsen. Nach höchstens d_1 solcher Austauschschritte ist $N(v_1) = \{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$ und wegen Fall I gilt dann, dass d' graphisch ist. \square

Die Konstruktion, die wir eben im Beweis benutzt haben, wollen wir noch in einer Definition festhalten:

Definition 2.12. Betrachte die Knoten a, b, c, d . Das Austauschen der Kanten (a, b) und (c, d) durch (a, c) und (b, d) nennt man einen *2-switch*.

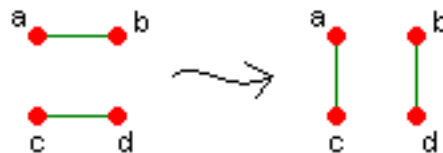
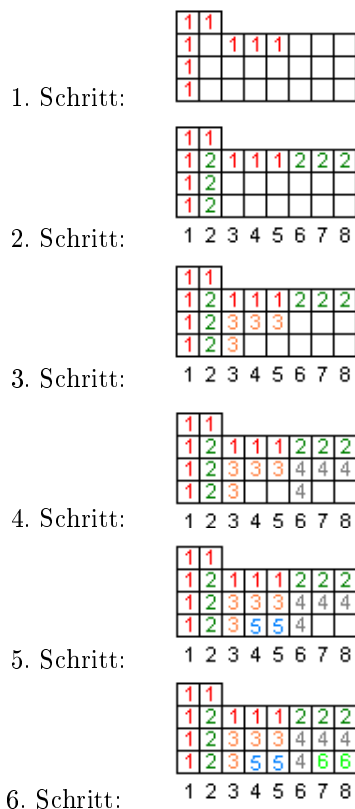


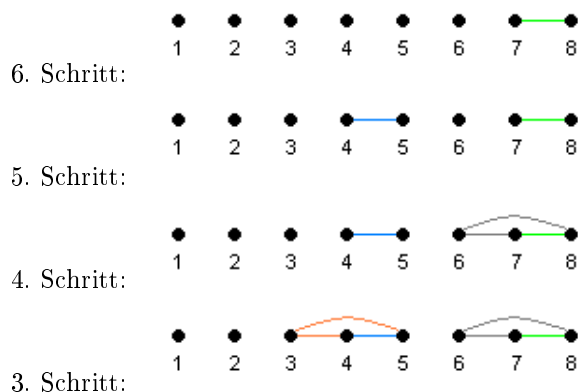
ABBILDUNG 20. Ein 2-switch

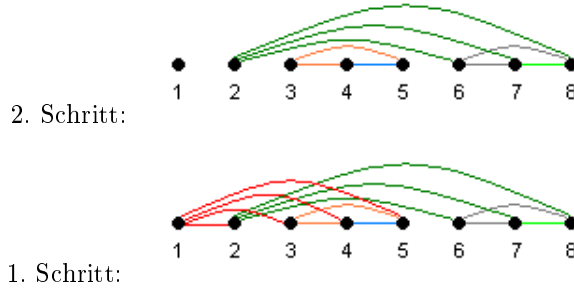
Aus dem Satz von Havel-Hakimi lässt sich leicht ein rekursives Verfahren herleiten, so dass man bestimmen kann, ob eine Gradsequenz graphisch ist und wenn ja, wie ein dazugehöriger Graph aussieht. Das Verfahren formal zu beschreiben ist etwas komplizierter, deswegen wollen wir es hier nur an einem Beispiel durchgehen.

Example 2.13. Sei $d = \{4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3\}$ die zu untersuchende Gradsequenz. Betrachte diese als Türme. In jedem Schritt werden wir nun, wie im Satz von Havel-Hakimi von den d_i größten Gradzahlen jeweils 1 subtrahieren, wobei d_i die größte Gradzahl im i -ten Schritt darstellt. Dabei sortieren wir die Gradzahlen nicht bei jedem Schritt neu, um später den Graphen besser konstruieren zu können:



Mit Hilfe der letzten Darstellung können wir leicht entscheiden, ob ein solcher Graph existiert oder nicht. Um nun den Graphen mit der Gradsequenz d zu konstruieren, wiederholen wir die Schritte von 6. bis 1. und fügen jedesmal einen neuen Knoten und die dazugehörigen Kanten hinzu:





Den so ermittelten Graphen bezeichnen wir auch mit G_d^* .

Lemma 2.14. Sind G und H Graphen auf der Knotenmenge V mit gleichen Gradfolgen $d : V \rightarrow \mathbb{N}$, dann kann man G durch eine Folge von 2-switches in H überführen.

Beweis. Sei d die Gradfolge von G und H . Betrachte den Graphen G_d^* , wie im Beispiel oben beschrieben. Aus Beweis zum Satz von Havel-Hakimi folgt, dass G und H durch eine Folge von 2-switches in G_d^* überführt werden können. Ebenso kann H auch in G überführt werden. \square

3. WEGE UND KREISE

Definition 3.1. Ein *Kantenzug* in G ist eine Folge $W = v_0, v_1, \dots, v_k$ von Knoten mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E, i = 0, \dots, k - 1$. Wenn die Kanten von W alle verschieden sind, dann ist W ein *Weg*. Wenn die Knoten alle verschieden sind, dann ist W ein *Pfad* (oder *einfacher Weg*). Die *Länge von W* ist gleich der Anzahl von Kanten von W , also k . Ein Weg W hat die *Endknoten* v_0 und v_k . Ein $x - y$ -*Weg* ist ein Weg mit Endknoten x und y . Ein *Kreis* ist ein geschlossener ($v_0 = v_k$) Kantenzug. Ein *Zykel* ist ein geschlossener Pfad.

Proposition 3.2. Jeder Graph G enthält einen Pfad der Länge $\geq \delta(G)$ und einen Zykel der Länge $\geq \delta(G) + 1$, falls $\delta(G) \geq 2$ ist.

Beweis. 1. z.z.: Es existiert ein Pfad der Länge $\geq \delta(G)$.

Sei v_0, v_1, \dots, v_k ein längster Pfad in G . Da dieser Pfad nicht verlängerbar ist gilt:

$$N(v_k) \subseteq \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$$

Daraus folgt sofort:

$$\delta(G) \leq |N(v_k)| \leq |\{v_0, \dots, v_{k-1}\}| = k$$

Note 3.3. Ein Pfad, der mindestens die Länge $\delta(G)$ hat, kann leicht durch schrittweise Verlängerung gefunden werden. Einen längsten Pfad zu finden ist algorithmisch schwierig (NP-hard).

2. z.z.: Es gibt einen Zykel der Länge $\geq \delta(G) + 1$.

Sei v_0, \dots, v_k wieder der längste Pfad in G . Da $\delta(G) \geq 2$, muss es mindestens noch eine Kante geben, die von v_k aus geht, und die nicht auf dem Pfad liegt. Sei v_i der Nachbar mit $k - i$ maximal $\Rightarrow N(v_k) \subseteq \{v_i, \dots, v_{k-1}\}$ und damit hat der Zykel v_i, \dots, v_k, v_i die Länge $k - i + 1 \geq |N(v_k)| + 1 \geq \delta(G) + 1$. \square

3.1. Euler-Kreise.

Definition 3.4. Ein *Euler Kreis* in G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante aus G genau einmal benutzt.

Theorem 3.5. Ein zusammenhängender Graph G besitzt genau dann einen Euler-Kreis, wenn alle Knoten einen geraden Grad haben.

Beweis. Sei $K = (v_0, v_1, \dots, v_l, v_0)$ ein längster geschlossener Kantenzug ohne Kantendoppelbenutzung. Angenommen, es existiert eine Kante e , die nicht benutzt wurde. Sei $e = (x, y)$ und $P = (x, x_1, \dots, x_s)$ ein Weg, der x mit $v_0 = x_s$ verbindet. Ein solcher Weg existiert, weil G zusammenhängend ist.

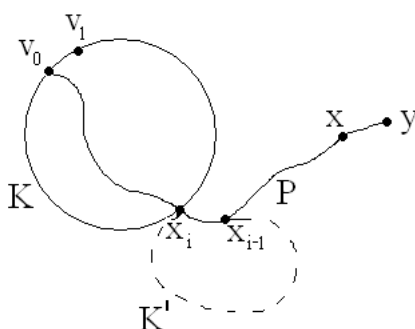


ABBILDUNG 21. Die Kante (x, y) liegt nicht auf K und der Weg P verbindet x mit v_0 .

Sei x_i der erste Knoten in P , der auf K liegt. Dann ist die Kante (x_{i-1}, x_i) ebenfalls nicht in K . Sei G' der Graph, der übrigbleibt, wenn wir aus G alle Kanten, die von K benutzt werden, löschen. Alle Knotengrade von G' sind gerade, weil

$$d_{G'}(v) = \underbrace{d_G(v)}_{\text{gerade nach Vor.}} - d_K(v)$$

mit $d_K(v)$ = Anzahl der Kanten, die v enthalten und von K benutzt werden. Da K ein Kreis ist, ist $d_K(v)$ gerade, und somit auch $d_{G'}(v) \forall v \in V$.

Wir konstruieren nun einen Kreis K' in G' . Dabei starten wir in (x_i, x_{i-1}) und setzen immer weiter fort, bis sich der Kantenzug zu einem Kreis in x_i schließt. Das ist möglich, da alle Knotengrade gerade sind. Sei $K' = (w_0, \dots, w_k)$. Dann ist $(v_0, \dots, v_j, w_1, \dots, w_k, v_{j+1}, \dots, v_s)$ ein längerer Kreis als K .



ABBILDUNG 22. Die Kreise K' und K bilden einen Kreis in G .

Widerspruch zur Annahme.

□

3.2. Abstand, zentrale Knoten und Radius.

Definition 3.6. Der *Abstand* $dist(x, y)$ zwischen zwei Knoten $x, y \in G$ ist die Länge eines kürzesten $x - y$ -Weges in G . Ein Knoten x aus G ist *zentral*, wenn sein *Abstand* zum entferntesten Knoten möglichst klein ist. Dieser Abstand ist der *Radius* $rad(G)$ von G . Es gilt:

$$rad(G) = \min_{x \in V} (\max_{y \in V} dist(x, y)).$$

Proposition 3.7. Ein Graph mit dem Radius r und Maximalgrad Δ hat höchstens

$$\frac{\Delta}{\Delta - 2} (\Delta - 1)^r$$

Knoten.

Beweis. Sei z ein zentraler Knoten und $D_i(z)$ die Menge der Knoten mit Abstand i von z . Dann gilt:

- $D_j(z) = \emptyset$ für $j > r$
- $V = \cup_{i=0}^r D_i(z)$
- $|D_0| = 1, |D_1| \leq \Delta, |D_{i+1}| \leq (\Delta - 1)|D_i|$ für $i \geq 1$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} |V| &\leq 1 + \Delta + (\Delta - 1)\Delta + (\Delta - 1)^2\Delta + \dots + (\Delta - 1)^{r-1}\Delta \\ &= 1 + \Delta \sum_{i=0}^{r-1} (\Delta - 1)^i \\ &= 1 + \Delta \frac{1 - (\Delta - 1)^r}{1 - \Delta - 1} \\ &= 1 + \frac{\Delta(\Delta - 1)^r - \Delta}{\Delta - 2} \\ &\leq \frac{\Delta(\Delta - 1)^r}{\Delta - 2}, \end{aligned}$$

weil $1 - \frac{\Delta}{\Delta - 2} \leq 0$. □

4. ZUSAMMENHANG

Definition 4.1. Ein Graph $G = (V, E)$ ist *zusammenhängend*, wenn es $\forall u, w \in V$ einen $u - w$ -Pfad in G gibt.

Note. Hier wird die Existenz eines $u - w$ -Pfades vorausgesetzt. Wie wir im nächsten Lemma sehen, könnten wir die Definition auch über einen $u - w$ -Kantenzug machen.

Lemma 4.2. In einem beliebigen Graphen existiert ein $u - w$ -Kantenzug genau dann, wenn ein $u - w$ -Pfad existiert.

Beweis. " \Leftarrow " klar, jeder $u - w$ -Pfad ist auch ein $u - w$ -Kantenzug.

" \Rightarrow " Es sei der $u - w$ -Kantenzug $u = \underbrace{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}}_{\text{einfacher Kantenzug}}, x_i, \dots, x_r = w$ gegeben.



ABBILDUNG 23. Ein $u - w$ -Kantenzug auf Pfad verkürzt.

Wir verkürzen diesen Kantenzug schrittweise, so dass die einfachen Anfangsabschnitte immer länger werden. Dabei ist ein einfacher Abschnitt ein Teilkantenzug, der nur einmal auf dem ganzen Kantenzug vorkommt. Sei x_0, \dots, x_{i-1} der bisherige längste einfache Anfangsabschnitt. Sei j maximal mit $x_i = x_j$. Dann ist der Abschnitt $x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{j+1}$ ein einfacher Anfangsabschnitt, und er ist länger als der andere. Führt man diese Prozedur weiter fort, erhält man einen $u-w$ -Pfad. \square

Definition 4.3. *Zusammenhangskomponente* kann man auf zwei unterschiedliche Weisen definieren. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- (1) Definiere die Relation \sim durch $u \sim v \Leftrightarrow \exists u-w$ -Pfad. Die Relation ist eine Äquivalenzrelation und sie induziert eine Partition U_1, \dots, U_s von V . Die von U_i induzierten Untergraphen von G sind die Zusammenhangskomponenten von G .
- (2) Ist $U \subset V$ eine Teilmenge, die einen maximalen zusammenhängenden Untergraphen $G[U] = (U, E \cap \binom{U}{2})$ von G induziert. Dann ist $G[U]$ eine Zusammenhangskomponente.

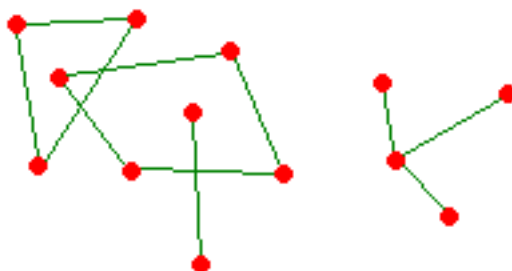


ABBILDUNG 24. Dieser Graph hat 4 Zusammenhangskomponenten.

Nun interessieren wir uns dafür, wie man durch Löschen von Kanten oder Knoten einen zusammenhängenden Graphen unzusammenhängend machen kann.

4.1. **Separator.**

Definition 4.4. Ein *Separator* (trennende Knotenmenge) von $G = (V, E)$ ist ein $S \subseteq V$, so dass $G[V-S]$ unzusammenhängend (oder einelementig) ist. Der (*Knoten-*) *Zusammenhang* $\kappa(G)$ ist die minimale Größe eines Separators.

Example 4.5.

Graph G	Zusammenhang
Pfade	$\kappa = 1$
Kreise	$\kappa = 2$
vollst. Graphen K_n	$\kappa = n - 1$
vollst. bipart. Graphen $K_{n,m}$	$\kappa = \min(m, n)$

Corollary. *Allgemein können wir über κ zwei Aussagen treffen:*

- (1) *Die Nachbarschaft eines Knotens ist ein Separator.*
- (2) *Wenn es k disjunkte $u-w$ -Pfade gibt, die paarweise nur die Endknoten gemeinsam haben, dann hat jeder Separator, der u und w trennt Kardinalität $\geq k$.*

Corollary 4.6. Für den Hyperwürfel Q_k gilt

$$\kappa(Q_k) = k.$$

Beweis. 1. zeige: $\kappa(Q_k) \leq k$.

Der Grad eines jeden Knotens in Q_k ist k . Betrachtet man die Nachbarschaft eines Knotens x als Separator, dann hat sie die Kardinalität k . Daraus folgt die Behauptung.

2. zeige: $\kappa(Q_k) \geq k$.

Sei S ein minimaler Separator in Q_k und seien a, b getrennt durch S . o.B.d.A sei $a = (0, \dots, 0)$ und $b = (1, \dots, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$. Dann können wir k intern

disjunkte $a - b$ -Wege konstruieren. Dazu gelten folgende Bildungsvorschriften:

Für $1 \leq i \leq j$ folge dem Weg a, x_1, \dots, x_n, b

$$\begin{aligned} a &= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_j, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_k) \\ x_1 &= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_j, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ x_2 &= (0, 0, \dots, 1, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_j, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ x_i &= (1, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_j, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ x_{i+1} &= (1, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ x_{i+2} &= (1, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 1, \underbrace{1}_j, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ b &= (1, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_i, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_j, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \end{aligned}$$

Für $k \geq i > j$ bilden wir die Wege a, x_1, \dots, x_n, b :

$$\begin{aligned} a &= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_j, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_i, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ x_1 &= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{0}_j, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ x_2 &= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ x_3 &= (0, 0, \dots, 1, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \\ b &= (1, 1, \dots, 1, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0, 0, \dots, \underbrace{0}_k) \end{aligned}$$

Alle Wege sind disjunkt. Nach dem vorherigen Korollar folgt die Behauptung und somit insgesamt $\kappa(G) = k$. \square

4.2. Schnitt.

Definition 4.7. Ein *Schnitt* (trennende Kantenmenge) in G ist eine Teilmenge $F \subset E$ mit $G \setminus F = (V, E - F)$ unzusammenhängend. Der *Kantenzusammenhang* $\kappa'(G)$ ist die minimale Größe eines Schnitts.

Proposition 4.8. Für alle Graphen G gilt

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

Beweis. 1. Zeige $\kappa'(G) \leq \delta(G)$:

Sei v ein Knoten mit $d(v) = \delta(G)$ die anliegenden $\delta(G)$ Kanten sind ein Schnitt.

2. Zeige $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$:

Sei F ein minimaler Schnitt. Ziel: Konstruiere einen Separator T mit

$$\kappa(G) \leq |T| \leq |F| = \kappa'(G).$$

Sei H eine Komponente von $G \setminus F$, sei S die Menge der Knoten von H , die an einer F -Kante liegen.

1. Fall: Falls $V(H) \neq S$, dann ist S trennend. Da jeder Knoten in S eine F -Kante hat, gilt $|S| \leq |F|$. Setze $T = S$.

2. Fall: Wähle $x \in S$. Die Menge $(S \setminus x) \cup N(x)$ ist trennend und es gilt $|(S \setminus x) \cup N(x)| \leq |F|$.

$$\Rightarrow \kappa(G) \leq |S \setminus x \cup N(x)| \leq |F| = \kappa'(G) \quad \square$$

Example 4.9. Einige Beispiele zum Verhältnis von κ' und κ .

- (1) Wir verbinden zwei vollständige Graphen an einem Knoten. Dann gilt $\kappa = 1$ aber $\kappa' = n - 1 = \delta$. Der Wert κ in einem Graphen kann also viel kleiner sein als κ' .

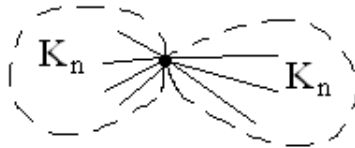


ABBILDUNG 25. Zwei K_n an einem Knoten verbunden.

- (2) Auch kann der Wert von κ' beliebig kleiner sein als δ . Starte mit einem Graphen G und konstruiere G^* , indem an jeden Knoten ein K_n angeklebt wird. Dann gilt $\kappa'(G) = \kappa'(G^*)$ und $\delta(G^*) = \delta(G) + (n - 1)$.

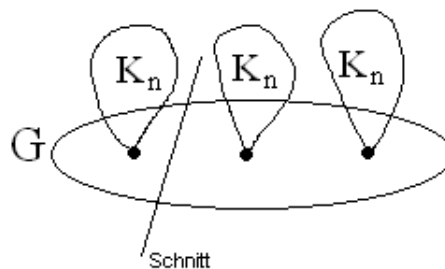


ABBILDUNG 26. Konstruktion des Graphen G^* aus G mit Hilfe von K_n .

- (3) Ist ein Graph G 3-regulär dann gilt $\kappa'(G) = \kappa(G)$.

(4) Bei 4-regulären Graphen gilt diese Aussage nicht.

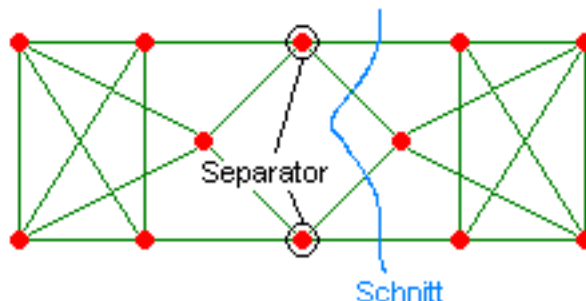


ABBILDUNG 27. Der Graph ist 4-regulär mit $\kappa(G) = 2$ und $\kappa'(G) = 4$.

Der Graph aus dem Beispiel ist 4-regulär, aber $\kappa(G) = 2$ und $\kappa'(G) = 4$. Dazu müssen wir folgende Aussagen beweisen:

(a) $\kappa(G) = 2$.

(Das Bild zeigt $\kappa \leq 2$.) Es gibt einen Kreis C , der alle Knoten enthält. Bei einem Kreis ist $\kappa = 2$. Also gilt auch $\kappa \geq 2$.

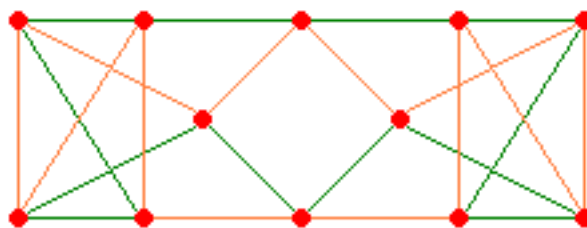


ABBILDUNG 28. Hamilton-Kreise in G .

(b) $\kappa'(G) = 4$.

(Wieder ist " \leq " klar.) Das Kantenkomplement von C ist ein weiterer Kreis, der alle Knoten enthält. Jeder Schnitt eines Kreises muss mindestens aus 2 Kanten bestehen. Da wir in dem Beispiel 2 Kreise zerschneiden müssen, gilt $\kappa'(G) \geq 4$.

5. WÄLDER UND BÄUME

5.1. Charakterisierungen von Bäumen.

Definition 5.1. Ein Graph, der keinen Kreis besitzt, ist ein *Wald*. Ein zusammenhängender Wald ist ein *Baum*. Ein Knoten, der in einem Wald Grad 1 hat, ist ein *Blatt*.

Lemma 5.2. Jeder endliche Baum auf ≥ 2 Knoten besitzt mindestens 2 Knoten vom Grad 1.

Beweis. Sei e eine Kante. Da es keinen Kreis gibt, kann man in beide Richtungen Pfade konstruieren, bis man an Knoten mit Grad 1 kommt. \square

Lemma 5.3. *Sei G zusammenhängend. Dann ist G ein Baum genau dann, wenn jede Kante ein Schnitt ist.*

Beweis. " \Leftarrow " Annahme: G ist kein Baum. Dann gibt es einen Kreis C in G . Sei $e \in C$ eine Kante. Dann ist $G \setminus e$ zusammenhängend und somit e kein Schnitt. Widerspruch.

" \Rightarrow " Annahme: e ist kein Schnitt. Dann gibt es in $G \setminus e$ einen Weg, der die Endknoten von e verbindet. Zusammen mit e bekommen wir also einen Kreis. Widerspruch, G war ein Baum. \square

Theorem 5.4. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) G ist zusammenhängend und azyklisch (Def. Baum)
- (2) G ist azyklisch und $|E| = |V| - 1$
- (3) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$

Beweis. Wir zeigen

- (1) Aus azyklisch und zusammenhängend folgt $|E| = |V| - 1$.

Per Induktion: Ein Baum hat ein Blatt. Nach dem Löschen eines Blattes gilt Folgendes: $|V'| = |V| - 1$ und $|E'| = |E| - 1$. Der Graph $G' = (V', E')$ ist azyklisch und zusammenhängend. Nach Induktionsannahme gilt $|E'| = |V'| - 1$ und somit auch die Behauptung.

- (2) Aus zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$ folgt azyklisch.

Konstruiere ein G' durch Löschen von Kanten, die auf einem Kreis liegen, aus G , so dass G' azyklisch ist. Es gilt aus (1): $|E'| = |V'| - 1 = |V| - 1 = |E|$. Daraus folgt sofort, dass es in G keine Kreise gab.

- (3) Aus azyklisch und $|E| = |V| - 1$ folgt zusammenhängend.

Seien G_1, \dots, G_k die Zusammenhangskomponenten von G . Die einzelnen Komponenten G_i sind azyklisch und zusammenhängend. Also gilt: $|E_i| = |V_i| - 1$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k| \\ &= |E_1| + \dots + |E_k| \\ &= (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + \dots + (|V_k| - 1) \\ &= |V| - k \\ &= |V| - 1. \end{aligned}$$

Da k die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in G angegeben hat, gibt es nur eine und somit ist G zusammenhängend. \square

5.2. Aufspannende Bäume.

Definition 5.5. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein Baum $T = (V, F)$ mit $F \subset E$ wird *aufspannender Baum* von G genannt.

Proposition 5.6. *Der Baum $T = (V, F)$ ist genau dann aufspannender Baum von G , wenn T maximal azyklisch und dieses gilt genau dann, wenn T minimal zusammenhängend ist.*

Beweis. Aus "maximal azyklisch" folgt azyklisch und zusammenhängend, also Baum, und aus "minimal zusammenhängend" folgt azyklisch, also auch Baum. \square

Note 5.7. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq V$ eines Vektorraums V ist eine Basis $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ maximal linear unabhängig $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ minimal aufspannend.

Es stellt sich nun die Frage, wieviele aufspannende Bäume ein K_n hat. Wir betrachten folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5	...	n
Anzahl aufspannender Bäume	1	1	3	16	125	...	n^{n-2}

5.3. Satz von Cayley.

Theorem 5.8. [Satz von Cayley] Die Anzahl der aufspannenden Bäume von K_n ist n^{n-2} .

Beweis. I. Mit Wurzelwaldketten:

Sei E eine Kantenmenge, so dass (V, E) ein Wald ist und $W \subseteq V$, so dass W in jeder Komponente von (V, E) eine Wurzel auszeichnet. Dies ist also ein Wurzelwald.



ABBILDUNG 29. Wurzelwald

Eine Wurzelwaldkette ist eine Folge F_1, \dots, F_n von Wurzelwäldern. Ein Wurzelbaum ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten als Wurzel. Sei F_1 ein aufspannender Wurzelbaum, F_n leer, und F_i interpoliere dazwischen. Dabei bedeutet "Interpolieren" Folgendes: F_{k+1} entsteht aus F_k durch Löschen einer Kante und Auszeichnung des Endknotens dieser Kante, der sich in der neuen Zusammenhangskomponente befindet, als neue Wurzel.



ABBILDUNG 30. F_{k+1} entsteht durch Interpolation von F_k .

Aus einem Wurzelbaum F_1 kann man $(n - 1)!$ Wurzelbaumketten erstellen. Das kommt daher: F_k hat $n - k$ Kanten, also kann es $n - k$ Verlängerungen F_1, \dots, F_{k+1} zu jedem Anfang F_1, \dots, F_k geben.

Wir betrachten nun das Rückwärtsinterpolieren: F_k entsteht aus F_{k+1} durch Wahl eines Knoten x , und einer Wurzel, die nicht die der x -Komponente ist, und das Hinzufügen der Kante (w, x) und Löschen von $w \in W$.

Zu einem Wurzelwald F_n (es gibt nur einen!) gibt es $n^{(n-1)} \cdot (n - 1)!$ Wurzelwaldketten, weil man in jedem Schritt k aus n Knoten einen beliebig wählen kann, Knoten x , und dann noch eine Wahlmöglichkeit von $n - k$ für die Wurzel bleibt. Daraus folgt, es gibt

$$\frac{n^{n-1} \cdot (n - 1)!}{(n - 1)!} = n^{n-1} \text{ (Doppeltes Abzählen)}$$

Wurzelbäume, also n^{n-2} Bäume, weil es in jedem Baum n Möglichkeiten gibt die Wurzel auszusuchen.

II. Über Abbildungen $\varphi : [n] \rightarrow [n]$:

Es gibt n^n Abbildungen $\varphi : [n] \rightarrow [n]$. Wir stellen diese Abbildungen folgendermaßen dar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Eine solche Abbildung können wir in ein Diagramm schreiben, indem wir die obere Zeile als Knoten auffassen und der Knotenmenge Kanten hinzufügen, die immer von dem oberen Knoten einer Spalte in den unteren gehen.

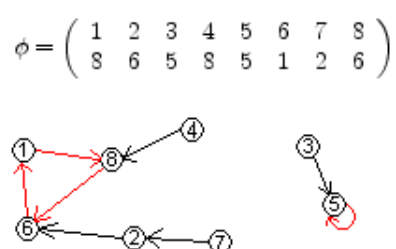


ABBILDUNG 31. Aus der Abbildung φ bilden wir einen Graphen G .

Folgende Beobachtung können wir bei diesem Graphen anstellen: Jede Komponente hat genau einen Kreis.

1. Jeder Knoten hat Ausgrad 1 und darum können zwei Kreise nicht verbunden sein.

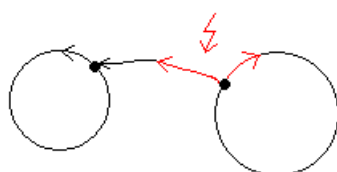


ABBILDUNG 32. Wenn zwei Kreise miteinander verbunden wären, dann hätte ein Knoten einen Ausgrad von mindestens 2.

2. In jeder Zusammenhangskomponente gibt es mindestens einen Kreis, da jeder Knoten den Ausgrad 1 hat und da unser Graph endlich ist, muss irgendwann eine Kante zu einem schon belegten Knoten zurück. Also erhalten wir einen Kreis.

Betrachten wir nun die Knoten, die an einem Kreis beteiligt sind, so induziert φ eine Permutation π_φ auf diesen Kreisknoten. Die Permutation wird auch in Zweizeilenform angegeben. In der unteren Zeile steht dann ein Pfad. Den Anfangsknoten des Pfades färben wir grün, den Endknoten rot. An die Knoten des Pfades hängen wir die nicht-Kreisknoten, wie im Digamm.

$$\pi_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

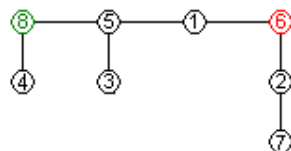


ABBILDUNG 33. Aus der Permutation π_φ bilden wir einen Baum.

Zwischen der Abbildung $\varphi : [n] \rightarrow [n]$ und den Bäumen auf n mit zwei ausgezeichneten Knoten (grün und rot) haben wir mit π_φ eine Bijektion. Zu jedem Baum im Graphen G gibt es n^2 Möglichkeiten die ausgezeichneten Knoten zu wählen. Daraus folgt:

$$\frac{\text{Anzahl Abbildungen}}{\text{Anzahl ausgez. Knoten in Bäumen je Abb.}} = \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2} = \text{Anzahl Bäume.}$$

□

5.4. Bipartite und multipartite Graphen.

Definition 5.9. Ein Graph $G = (V, E)$ ist r -partit ($r \in \mathbb{N}$), wenn es eine Partition (V_1, \dots, V_r) von V gibt, so dass jedes V_i eine unabhängige Menge ist, d.h. $E \cap \binom{V_i}{2} = \emptyset \forall i = 1, \dots, r$

Proposition 5.10. Der Graph G ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Beweis. " \Rightarrow " Sei (V_1, V_2) eine Bipartition. Dann wechselt jeder Weg (sogar jeder Kantenzug) zwischen den beiden Klassen. Dies bedeutet, dass jeder Weg mit gleichem Anfangs- und Endknoten gerade Länge hat.

" \Leftarrow " Behauptung: Sei $v_0 \in V$ beliebig. Für alle $v \in V$ haben je zwei Wege, die v_0 mit v verbinden, die gleiche Länge mod 2.

Beweis: Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es zwei Wege W_1 und W_2 , die v_0 mit v verbinden, wobei W_1 eine gerade Anzahl von Kanten hat, und W_2 eine ungerade Anzahl von Kanten. Der Kreis, der aus dem Zusammenschluss von W_1 und W_2 entsteht, ist von ungerader Länge. Widerspruch. □

Sei V_0 die Menge der Knoten v , für die gilt: es gibt einen geraden $v_0 - v$ -Weg, und V_1 für die es einen ungeraden $v_0 - v$ -Weg gibt. Dann ist (V_0, V_1) eine Bipartition der Zusammenhangskomponenten von G , in der v_0 liegt. Bei den anderen Zusammenhangskomponenten geht man genauso vor. □

6. MAXIMALE KANTENZAHLEN

Es stellt sich die Frage: wieviele Kanten kann ein bipartiter Graph auf n Knoten höchstens haben?

Sei (V_1, V_2) eine Bipartition mit $|V_1| = a$ und $|V_2| = n - a$. Dann ist die Anzahl der Kanten

$$|E| \leq a \cdot (n - a).$$

Dieser Ausdruck wird für $a = \frac{n}{2}$ am größten, also $|E| \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2$ für n gerade oder allgemein:

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Proposition 6.1. Ein r -partiter Graph auf n Knoten mit $n = i \cdot r + j$ hat höchstens

$$i^2 \binom{r}{2} + j(r-1)i + \binom{j}{2}$$

Kanten. Das entspricht der Anzahl der Kanten eines $K_{\underbrace{i+1, \dots, i+1}_j, \underbrace{i, \dots, i}_r}$.

Beweis. Sei G ein maximierender Graph und V_1, \dots, V_r r -Partition von G . Angenommen eine Klasse hat mehr als $i + 1$ Knoten (o.B.d.A: V_1). Dann hat jeder Knoten $x \in V_1$ den Grad $n - |V_1| < n - (i + 1)$. Außerdem gibt es eine Klasse mit $\leq i - 1$ Knoten (o.B.d.A: V_2). Tausche x von V_1 nach V_2 . Der neue Graph hat mehr Kanten, denn der neue Grad von x ist

$$n - (|V_2| + 1) \geq n - (i - 1) - 1 = n - i.$$

□

6.1. Dreiecksfreie Graphen.

Definition 6.2. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt dreiecksfrei, wenn es in dem Graphen keinen Kreis der Länge 3 gibt.

Theorem 6.3. Sei G dreiecksfrei auf n Knoten. Dann ist die Anzahl der Kanten beschränkt durch

$$|E(G)| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Der Graph $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ ist der einzige maximierende Graph.

Note 6.4. Dreiecksfreie Graphen sind eine echte Obermenge von bipartiten Graphen. Z.B. ist der Petersen-Graph dreiecksfrei, aber nicht bipartit.

Beweis. Per Induktion. Sei G dreiecksfrei auf n Knoten, $(u, v) \in E$.

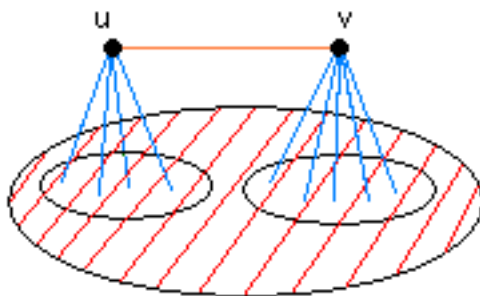


ABBILDUNG 34. Der Graph G ist dreiecksfrei.

Dann gilt $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, weil der Graph G sonst nicht dreiecksfrei wäre. Daraus folgt:

$$|E_{blau}| = d(u) - 1 + d(v) - 1 \leq n - 2.$$

Außerdem wissen wir $|E_{orange}| = 1$ und $|E_{rot}| \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ nach Induktionsvoraussetzung. Also gilt

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil + (n-2) + 1 = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Gleichheit impliziert Gleichheit in $|E_{rot}|$. Nach Induktion gilt: der rote Subgraph ist ein $K_{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lceil \frac{n-2}{2} \rceil}$. Der Knoten u und der Knoten v muss mit $\frac{n-2}{2}$ Knoten verbunden werden, wobei die Schnittmenge der Nachbarn von u und v leer war. Also können sie nur wie im Bild veranschaulicht, eingefügt werden.

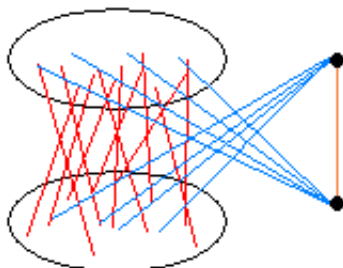


ABBILDUNG 35. In den $K_{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lceil \frac{n-2}{2} \rceil}$ werden die Knoten u und v eingefügt.

□

6.2. Der Satz von Turan.

Theorem 6.5. [Turán] Sei $G = (V, E)$ ein Graph auf n Knoten mit Cliquengröße $w(G) < k + 1$, $k \geq 2$. Dann gilt

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{n^2}{2}.$$

Note. Ein spezieller Fall wäre dreiecksfrei. Dann gilt $w(G) < 3$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} |E| &\leq \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{n^2}{2} \\ &= \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Beweis. I.: Verschieben von Gewichten.

Betrachte $w = (w_1, \dots, w_n)$ Gewichte für die Knoten v_1, \dots, v_n von G , so dass $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ und $w_i \geq 0 \forall i$. Unser Ziel ist es,

$$g(x) = \sum_{(v_i, v_j) \in E} w_i w_j.$$

zu maximieren.

Behauptung: falls zwei Knoten v_i und v_j in G sind mit $(v_i, v_j) \notin E$ und $w_i > 0$ und $w_j > 0$, dann existiert eine Knotengewichtung w' mit $g(w') \geq g(w)$.

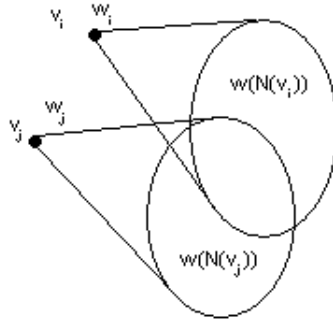


ABBILDUNG 36. Die Knoten v_i und v_j haben Gewichte größer Null, aber es existiert keine Kante zwischen ihnen.

Um die Behauptung zu verifizieren, betrachten wir $s_i := \sum_{v_k \in N(v_i)} w_k$ und $s_j := \sum_{v_k \in N(v_j)} w_k$ und definieren uns daraus eine neue Knotengewichtung w' . Sei $s_i \geq s_j$. Dann definieren wir $w'_i = w_i + w_j$, $w'_j = 0$ und $w'_k = w_k$ für alle $k \neq i, j$. Für dieses w' gilt

$$\begin{aligned} g(w') &= g(w) + w_j s_i - w_j s_j \\ &= g(w) + w_j (s_i - s_j) \\ &\geq g(w), \end{aligned}$$

also das Behauptete.

Wir können als von einer Knotengewichtung w ausgehend die Gewichte verschieben, ohne den Wert $g(w)$ zu vermindern, bis nur noch Knoten einer einzigen Clique in G positive Gewichte haben.

Sei w eine Gewichtung, so dass positive Gewichte nur auf einer t -Clique liegen. Dazu können wir eine weitere Beobachtung machen: Wenn gilt $w_i > w_j > 0$, dann existiert eine Kantengewichtung w' mit $g(w') \geq g(w)$. Dazu definieren wir uns $w'_i = \frac{w_i + w_j}{2} = w'_j$ und $w'_k = w_k$ für alle $k \neq i, j$. Für die Funktion g gilt dann

$$\begin{aligned} g(w') &= g(w) - w_i(1 - w_i) - w_j(1 - w_j) + 2\left(\frac{w_i + w_j}{2}\right)\left(1 - \frac{w_i + w_j}{2}\right) \\ &= g(w) + \frac{(w_i - w_j)^2}{2} \\ &> g(w). \end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt, weil

$$g(w) = \sum_{(a,b) \in E, a=i, b=j} w_k w_i + w_i \cdot \sum_{k=N(i) \setminus j} w_k + w_j \cdot \sum_{k=N(j) \setminus i} w_k + w_i w_j$$

Da wir in einer Clique sind, gilt $N(j) \setminus i = N(i) \setminus j$ und somit

$$\begin{aligned} g(w) &= \sum_{(a,b) \in E, a=i, b=j} w_k w_i + w_i \cdot \sum_{N(i) \neq j} w_k + w_j \cdot \sum_{N(j) \neq i} w_k + w_i w_j \\ &= ..(w_i + w_j) \sum w_k + w_i w_j \end{aligned}$$

d.h.

$$g(w') = g(w) + w'_i w'_j - w_i w_j,$$

weil $(w'_i + w'_j) = (w_i + w_j)$ ist.



ABBILDUNG 37. nur zwei Knoten sind benachbart

Sei nun $w_i = \frac{1}{t}$ für alle Knoten der t -Clique. Dann ist

$$g(w) = \frac{1}{t^2} \binom{t}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Dieser Ausdruck ist unter der Bedingung $t \leq w(G) \leq k$ maximal, wenn $t = k$.

Betrachte die Gewichtung w^* mit $w_i^* = \frac{1}{n}$ für alle i . Dann gilt

$$g(w^*) = \sum_{v_i, v_j \in E} \frac{1}{n^2} = \frac{|E|}{n^2}.$$

Aus $g(w^*) \leq g(w)$ folgt

$$\frac{|E|}{n^2} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

II. Über Zwillingknoten.

Sei G ein Graphen mit $w(G) \leq k$ und maximaler Kantenzahl.

Behauptung: G enthält keine drei Knoten u, v, w mit $(uv) \in E$ und $(u, w), (v, w) \notin E$.

Beweis: Wir beweisen diese Behauptung durch Widerspruch. Wir nehmen an, es würden solche drei Knoten existieren und konstruieren dann einen anderen Graphen, der auch nur Cliques der Größe höchstens k enthält, der aber mehr Kanten als G besitzt.

1. Fall: Falls gilt $d(u) > d(w)$ (oder analog für $d(v) > d(w)$), lösche w aus dem Graphen und ersetze ihn durch einen Zwilling u' von u .

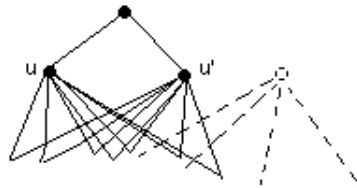


ABBILDUNG 38. Wir löschen den Knoten w und ersetzen ihn durch einen Zwilling u' und u .

Wir erhalten einen neuen Graphen G' mit

$$|E'| = |E| - d(w) + d(u) > |E|.$$

Der Graph G' enthält keine $k+1$ Clique: Angenommen G' enthält eine $k+1$ Clique C . Dann ist $u' \in C$, weil G keine Clique der Größe $k+1$ enthält. $u \notin C$, weil $(u, u') \notin E'$. Daraus folgt $C - u' + u$ ist eine $k+1$ -Clique in G , weil $N(u) = N(u')$.

2. Fall: Falls $d(u) \leq d(w)$ und $d(v) \leq d(w)$ lösche die Knoten u und v aus dem Graphen und ersetze sie durch zwei Zwillinge von w . Dann gilt für den neuen Graphen G' :

$$|E'| = |E| - (d(u) + d(v) - 1) + 2d(w) > |E|.$$

Der neue Graph G' enthält keine $k+1$ -Clique: Angenommen, G' hätte eine, dann würde diese Clique C den Knoten w' oder w'' enthalten, da $(w', w'') \notin E'$. Weiter wie gehabt... \square

Aus der Behauptung folgt, dass $u \sim v \Leftrightarrow uv \notin E$ eine Äquivalenzrelation ist. Daraus folgt $G = K_{n_1, \dots, n_t}$ mit $t \leq k$. Bleibt zu zeigen, dass der $\leq k$ -partite Graph G mit n Knoten und maximaler Kantenzahl der K_{n_1, \dots, n_k} mit $|n_i - n_j| \leq 1$ ist: Angenommen es gibt ein n_i und n_j mit $n_i < n_j - 1$. Dann können wir einen Graphen G' konstruieren, der eine größere Kantenzahl besitzt. Sei $d(x) = n - n_i > d(y) = n - n_j$. Lösche den Knoten y und ersetze ihn durch einen Zwilling von x . Wir erhalten eine höhere Kantenzahl.

Jetzt gilt also

$$|E| = \left\lfloor \left(1 + \frac{1}{t}\right) \frac{n^2}{2} \right\rfloor$$

und dies wird maximiert durch $t = k$. \square

III. Wir verwenden die Ungleichung $w(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n-d_v}$

Es gilt: $w(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n-d_v}$ genau dann wenn

$$\alpha(G) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

(Beweis kommt später), wobei $w(G)$ die Cliquengröße und $\alpha(G)$ die Größe einer maximalen unabhängigen Menge bezeichnet. Es gilt $w(G) = \alpha(\overline{G})$, $d_G(v) = (n-1) - d_{\overline{G}}(v) \Leftrightarrow n - d_{\overline{G}}(v) = d_G(v) + 1$.

Nach Cauchy-Schwarz gilt:

$$\langle a, b \rangle^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2.$$

Sei $a = (a_1, \dots, a_n)$ der Vektor mit $a_i = \frac{1}{\sqrt{n-d_i}}$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ der Vektor mit $b_i = \sqrt{n-d_i}$. Dann gilt

$$\langle a, b \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{n-d_i}}{\sqrt{n-d_i}} \right)^2 = n^2.$$

Es gilt außerdem

$$\|a\|^2 = \langle a, a \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n-d_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i} \leq w(G)$$

und

$$\|b\|^2 = \langle b, b \rangle = \sum_{i=1}^n (\sqrt{n-d_i})^2 = \sum_{i=1}^n n - d_i = n^2 - \sum_{i=1}^n d_i = n^2 - 2|E|.$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt dann

$$\begin{aligned} n^2 &\leq w(G)(n^2 - 2|E|) \leq k(n^2 - 2|E|) \\ \Leftrightarrow 2k|E| &\leq kn^2 - n^2 \\ \Leftrightarrow |E| &\leq \frac{(k-1)}{2k} n^2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

\square

6.3. Eine Schranke für $\alpha(G)$.

Theorem 6.6. *In jedem Graphen G haben wir folgende Schranke für die Größe einer unabhängigen Menge:*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Note 6.7. Die Ungleichung ist bestmöglich. Sei G z.B. eine disjunkte Vereinigung von Cliques der Größen n_1, \dots, n_k . Dann gilt

$$\alpha(G) = k$$

und

$$\sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1} = \sum_{j=1}^k \underbrace{\sum_{v \in C_j} \frac{1}{(n_j - 1) + 1}}_1 = k$$

Beweis. Beweis: I. Algorithmus *MAX*.

```
repeat
  wähle Knoten  $x$  maximalen Grades in  $G$ 
   $G \leftarrow G \setminus x$ 
until  $G$  hat keine Kanten mehr
 $I \leftarrow G$ 
return  $I$ 
```

Die Menge I ist nach Konstruktion unabhängig.

Behauptung: Die von *MAX* gelieferte Menge I erfüllt

$$|I| \geq \sum_{v \in V'} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Betrachte $A(G) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}$. Sei d_x maximal und $G' = G \setminus x$. Dann gilt $A(G') \geq A(G)$, weil

$$\begin{aligned} A(G') - A(G) &= \sum_{v \in N(x)} \underbrace{\frac{1}{d_v}}_{d_v + 1} - \sum_{v \in N(x)} \frac{1}{d_v + 1} - \frac{1}{d_x + 1} \\ &= \sum_{v \in N(x)} \frac{1}{d_v(d_v + 1)} - \frac{1}{d_x + 1} \\ &\geq \underbrace{\sum_{v \in N(x)} \frac{1}{d_x(d_x + 1)}}_{d_x \text{ Summanden}} - \frac{1}{d_x + 1} \\ &= \frac{1}{d_x + 1} - \frac{1}{d_x + 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wiederholte Anwendung der Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} A(I) &\geq A(G), \\ |I| &\geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1} \end{aligned}$$

Beweis II: Algorithmus *MIN*:

```
repeat
```

wähle Knoten x minimalen Grades

$G \leftarrow G \setminus (N(x) \cup x)$

$I \leftarrow I \cup x$

until $G = \emptyset$

return I

Behauptung: Die von MIN gelieferte unabhängige Menge I erfüllt

$$|I| \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Betrachte

$$A(G) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

Sei d_x minimal und $G' = G \setminus (N(x) \cup x)$. Dann gilt $A(G') \geq A(G) - 1$, weil

$$\begin{aligned} A(G') - A(G) &\geq -\left(\underbrace{\sum_{v \in N(x)} \frac{1}{d_v + 1}}_{\leq d_x \frac{1}{d_x + 1}} + \frac{1}{d_x + 1} \right) \\ &\geq -1. \end{aligned}$$

In jedem Algorithusschritt verringert sich der Wert von $A(G)$ höchstens um den Wert 1. Auf der anderen Seite wächst in jeder Iteration der Schleife I um 1. Da am Ende des Verfahrens gilt $A(G) = 0$, gibt es mindestens $A(G)$ Iterationen.

Beweis III: Probabilistisch.

Der Algorithmus $PROB$ hat die Form:

for all $v \in V$ do

$c(v) = \text{blau}$

repeat wähle $x \in G$ zufällig

$G \leftarrow G \setminus x$

if $c(x) = \text{rot}$ do nothing

else

$I \leftarrow I \cup x$ und

for all $v \in N(x)$ do

$c(v) = \text{rot}$.

until $G = \emptyset$.

Sei π eine Permutation der Knoten von G , also eine der Möglichkeiten, wie der Algorithmus die Knoten auswählt.

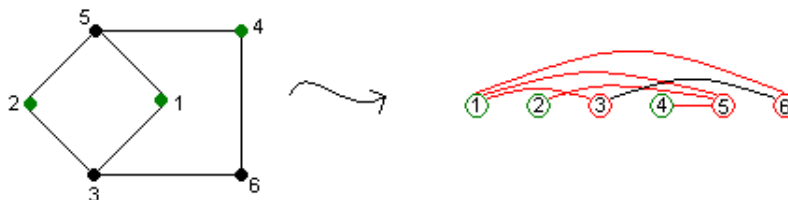


ABBILDUNG 39. In dem Graphen G werden die Knoten in der Reihenfolge π ausgewählt. Der Algorithmus $PROB$ liefert dann die grüne Menge.

Sei $I(\pi)$ die Menge der Knoten, die vor all ihren Nachbarn kommen. Es gilt $I(\pi) \subseteq I$, wobei Menge I aus dem Algorithmus $PROB$ kommt. Aus der Definition

folgt sofort $I(\pi)$ ist unabhängig. Wir interessieren uns für den Erwartungswert $E[|I(\pi)|]$ von $|I(\pi)|$, wenn π zufällig gewählt wird. Es gilt

$$|I(\pi)| = \sum_{v \in V} X_\pi(v)$$

wobei

$$X_\pi(v) = \begin{cases} 1 & v \in I(\pi) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P(X_\pi(v) = 1)$, dass $X_\pi(v) = 1$ ist, gilt

$$P(X_\pi(v) = 1) = \frac{1}{d_v + 1},$$

da es für jeden Knoten aus $N(v) \cup v$ gleich wahrscheinlich ist, in der Permutation, die π auf $N(v) \cup v$ induziert wird, der erste Knoten zu sein. Für den Erwartungswert bekommen wir dann

$$\begin{aligned} E[|I(\pi)|] &= E\left[\sum_{v \in V} X_\pi(v)\right] \\ &= \sum_{v \in V} E[X_\pi(v)] \\ &= \sum_{v \in V} P[X_\pi(v) = 1] \\ &= \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}. \end{aligned}$$

(Erste \rightarrow zweite Zeile gilt, da Erwartungswert linear; zweite \rightarrow Zeile gilt für Zufallsvariablen, die nur den Wert 0 oder 1 annehmen.) \square

Note 6.8. Bemerkungen:

- Wenn *MIN* in jedem Schritt einen zufälligen Knoten wählt, dann ist die erwartete Größe der unabhängigen Menge $\geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}$.
- das probabilistische Argument ist eine elegante Version des doppelten Abzählens: Betrachte Paare (π, v) mit $v \in I(\pi)$. Es gilt: $\forall v$ ist die Anzahl der π mit $v \in I(\pi)$ genau $\frac{n!}{d_v + 1}$. Daraus folgt, dass die Gesamtanzahl der Paare $n! \left(\sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}\right)$ ist. Andererseits hat die Zahl der Paare $\sum_{\pi} |I(\pi)|$ einen Erwartungswert

$$E[|I(\pi)|] = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} |I(\pi)| = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}.$$

- Es gibt mindestens eine Permutation, die eine unabhängige Menge mit $|I(\pi)| \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v + 1}$ erzeugt. Beweisen kann man dieses mit der Probabilistischen Existenz nach "Erdős Magic". Wenn wir zählen, entspricht das dem Schubfachprinzip.

7. ELEKTRISCHE NETZE

Ein elektrisches Netz ist ein Multigraph, in dem jede Kante e_i einen Widerstand (resistance) r_i besitzt. In diesem Netzwerk sollen im Allgemeinen die Stromstärken, die Potentiale und die Potentialdifferenzen bei gegebenen Quellen und Senken berechnet werden. Wenn eine Spannung (Potentialdifferenz) p_i an die Endknoten a_i und b_i von e_i angelegt wird, fließt ein Strom der Stärke w_i von a_i nach b_i wobei

$$w_i = \frac{p_i}{r_i} \text{ (Ohmsches Gesetz)}$$

gilt. Hieraus folgt sofort $p_i = w_i r_i$. Es ist üblich, Kanten orientiert zu betrachten. Wichtige Variablen in jedem Netzwerk sind:

w_i Fluss in e_i , Fluss vom Startknoten zum Zielknoten
 p_i Potentialdifferenz in e_i = Potential im Startknoten minus Potential im Zielknoten.

$$w_{ab} = -w_{ba} \text{ , } p_{ab} = -p_{ba}$$

7.1. Kirchhoffsche Gesetze.

Theorem 7.1. *Kirchhoffsche Gesetze:*

(1) *Sei x_1, x_2, \dots, x_k ein Kreis in G . Dann gilt*

$$p_{x_1x_2} + p_{x_2x_3} + \dots + p_{x_kx_1} = 0.$$

(2) *Sei x ein Knoten und y_1, \dots, y_d die Nachbarn. Dann gilt*

$$w_{xy_1} + w_{xy_2} + \dots + w_{xy_d} + q_x = 0,$$

wobei q_x die Quellstärke von x darstellt. (Kurz: Zufluss=Abfluss)

Das 1. Potentialgesetz erlaubt es, den Knoten absolute Potentiale V_a zuzuordnen, so dass die Potentialdifferenz

$$p_{ab} = V_a - V_b$$

erfüllt ist. Dabei werden die Potentiale V_a über die Potentialdifferenz von Kanten aus dem Netzwerk definiert, und die Potentialdifferenzen von Kanten, die nicht im Netzwerk enthalten sind, über die Potentiale V_a . Daraus erhalten wir folgenden Ansatz, um die Potentiale V_a in einem Graphen G mit gegebenen Potentialdifferenzen zu berechnen: Wähle einen aufspannenden Baum, und einen Knoten a_0 . Setze $V_{a_0} = 0$, und berechne V_a für die anderen Knoten entlang der Baumkanten. Die Lösung erfüllt $p_{ab} = V_a - V_b$ auch für Nichtbaumkanten wegen des 1. Kirchhoffschen Gesetzes.

7.2. Ein Beispiel mit Lösungsstrategie.

Example 7.2. Wir betrachten das folgende elektrische Netzwerk mit den angegebenen Widerständen.

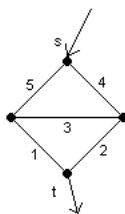


ABBILDUNG 40. Netzwerk mit Widerständen.

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze ergeben sich die folgenden Gleichungen für den Fluss auf den Kanten:

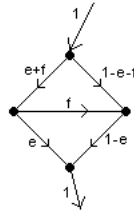


ABBILDUNG 41. Beginnt man mit der Kante unten links und einem Fluss e darauf, ergeben sich die anderen Gleichungen aus der Flussserhaltung.

Mit den so gegebenen Flussgleichungen ergibt sich für die Potentiale entlang des grün aufgespannten Baumes mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes:

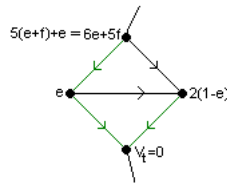


ABBILDUNG 42. Der grüne spannende Baum ermöglicht es, die Potentialdifferenzen zu berechnen.

Für die Nichtbaumkanten erhalten wir mit dem Ohmschen Gesetz:

$$\begin{aligned} 3f &= -2(1 - e) + e \\ 4(1 - e - f) &= 6e + 5f - 2(1 - e) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann $f = e - \frac{2}{3}$ und schließlich $e = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ und $f = -\frac{2}{21}$.

Definition 7.3. Eine Potentialdifferenz (= Spannung), die man benötigt, um einen Fluss 1 zwischen s und t zu erzeugen, heißt effektiver Widerstand.

Example 7.4. In dem vorherigen Beispiel liegt der effektive Widerstand bei $6e + 5f = \frac{62}{21}$. Auf dem grünen Weg von s nach t fließt der Fluss $e + f$ bzw. e . Auf diesen Kanten liegt ein Widerstand von 5 und 1. Also haben wir im Startknoten S ein Potential von $5(e + f) + e$.

Eine heuristische Überlegung: Sei G ein elektrisches Netzwerk mit m Kanten, einer Quelle s , einer Senke t und Widerständen r_1, \dots, r_m . Auf G soll ein Fluss 1 entstehen, d.h. $q_s = 1$ und $q_t = -1$. In dem Netzwerk gibt es m Flussvariablen und $n - 1$ Flussserhaltungsgleichungen. Nach dem Eliminieren bleiben also $m - n + 1$ Flussvariablen.

Stelle die Potentiale durch Flussvariablen dar. Dazu verwende $n - 1$ Baumkanten. Jede Nichtbaumkante liefert eine zusätzliche Gleichung: $m - n + 1$ Stück, weil jede Nichtbaumkante einen Kreis mit den Baumkanten bildet. Also gibt es gleich viele Gleichungen und Variablen. Wie wir im Folgenden zeigen, existiert eine eindeutige Lösung, wenn das System gewissen Bedingungen genügt.

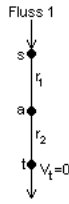


ABBILDUNG 43. Ausgangssituation

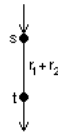


ABBILDUNG 44. Ein äquivalentes System

Überlagerungsprinzip und Eindeutigkeit

Die Beziehungen zwischen w_{ab} und V_a sind linear, also homogene Gleichungen. Summen (Überlagerungen) von Lösungspaaren (w_{ab}, V_a) liefern neue Lösungen. Jeder Stromfluss mit mehreren Quellen und Senken kann in solche mit je einer Quelle und Senke zerlegt werden, d.h. wir können alle Probleme auf Probleme mit einer Quelle und Senke vereinfachen.

Die Eindeutigkeit eines Flusses bei gegebenen Potentialen von Quelle und Senke folgt aus Überlagerung: Betrachte zwei Lösungen des Problems. Die Differenz der beiden ist ein System $(w_{ab}), (V_a)$ ohne Quelle und Senke. Wenn es in dem System also einen echt positiven Fluss gibt, dann gibt es auch einen Kreis, auf dem Fluss fließt. Entlang des Flusskreises sind Potentiale aber streng monoton fallend. [Fließt ein Strom mit w_{ab} von a nach b bei einem Widerstand $r_{ab} > 0$, ergibt sich eine Potentialdifferenz von $w_{ab} = r_{ab}p_{ab}$ und für die Potentiale ergibt sich $V_b = V_a - w_{ab}$, also $V_b < V_a$.] Widerspruch. Daraus folgt die Eindeutigkeit.

7.3. Serien-Parallele Netze (Problemreduzierung). Serielle Reduktion:

$V_a = r_1 + V_t = r_1$, da $V_t = 0$. Also ergibt sich für den effektiven Widerstand

$$r = V_s = r_2 + V_a = r_1 + r_2.$$

Das System ist also äquivalent zu:

Ebenso kann man "Mehrfachkanten" zusammenfassen.

Parallele Reduktion:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ V_s &= r_1 w_1 + V_t = r_1 w_1 \\ V_s &= r_2 w_2 + V_t = r_2 (1 - w_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt $w_1 = \frac{r_2}{r_1+r_2}$ und $r = V_s = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1+r_2}$. Beobachtung: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$
Leitfähigkeit als Reziprokes des Widerstandes.

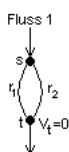


ABBILDUNG 45. Parallele Schaltung

Mit diesen beiden Regeln kann man die Lösung in serien-parallelen Netzwerken berechnen.

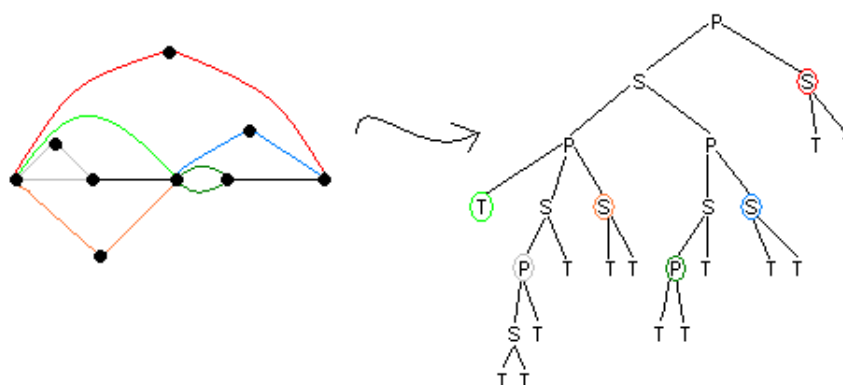


ABBILDUNG 46. Ein serienparalleles Netzwerk kann auch als Dekompositionsbaum dargestellt werden.

P = parallel reduzierbar, S = seriell reduzierbar, T = trivial (nur eine Kante)

Example 7.5. Vereinfachung des Würfelnetzwerks:

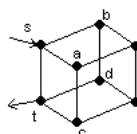


ABBILDUNG 47. Das Würfelnetzwerk

Seien alle Widerstände gleich 1. Aus Symmetriegründen gilt dann $V_a = V_b$ und $V_c = V_d$. Dies folgt auch aus der Eindeutigkeit des Flusses: Über die Kante (s, b) fließt w_{sb} und über die Kante (s, a) der Fluss w_{sa} . Angenommen o.B.d.A. $w_{sb} < w_{sa}$. Dann könnte eine Lösung des Systems auch der Fluss w_{sb} über die Kante (s, a) und w_{sa} über die Kante (s, b) fließen. Da ein Fluss aber eindeutig ist, haben wir

einen Widerspruch. Also gilt $w_{sb} = w_{sa}$ und somit können die Potentiale auch zusammengezogen werden. Es ergibt sich also ein neues serienparalleles Netz.

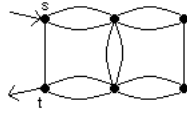


ABBILDUNG 48. Serienparalleles Netzwerk

Weitere Ersetzungsregel: $\Delta - Y$:
 Hat ein Netzwerk an einem Knoten folgende Form,

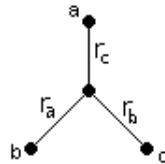


ABBILDUNG 49. Y-Form

kann man ihn durch neue Kanten mit $s = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a$ ersetzen.

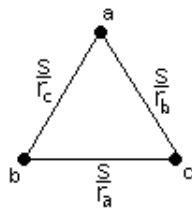


ABBILDUNG 50. Δ -Form

Man zeigt, dass in beiden Systemen die Potentialdifferenzen p_{ab} , p_{bc} , p_{ca} gleich sind. (siehe Übung!)

Example 7.6. Mit Stern-Dreiecks-Transformationen kann man einen Würfel in ein Dreieck überführen.

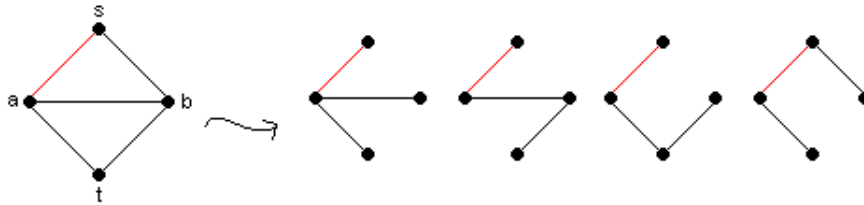


ABBILDUNG 51. Aufspannende Bäume, die die Kante $\{s,a\}$ auf dem s - t -Pfad enthalten

7.4. Existenz von Lösungen.

Theorem 7.7. Sei $G = (V, E)$ ein Netz mit ausgezeichneten Knoten s, t und Kantenwiderständen $r_i = 1$. Dann ist ein Fluss der Stärke N von s nach t , der die Kirchhoffschen Gesetze erfüllt, gegeben durch

$$w_{ab} = N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t).$$

Dabei ist N die Anzahl der aufspannenden Bäume von G und $N(s, x, y, t)$ die Anzahl der aufspannenden Bäume T , bei denen x und y auf dem s - t -Pfad in T in dieser Reihenfolge vorkommen und selber auch durch eine Kanten verbunden sind.

Example 7.8. Im Graphen G ist die Anzahl der aufspannenden Bäume gleich 8. Für $N(s, s, a, t)$ erhalten wir den Wert 4 (obige Zeichnungen), ebenso aus Symmetriegründen für $N(s, s, b, t)$. Weiter gilt $N(s, a, b, t) = 1 = N(s, b, a, t)$. Für $N(s, a, t, t) = N(s, b, t, t)$ erhalten wir den Wert 4. Damit gilt, dass auf der Kante w_{sa} ein Fluss von 4, auf $w_{sb} = 4$ und auf $w_{at} = 4 = w_{bt}$ fließt. Auf der Kante w_{ab} fließt kein Fluss.

Beweis. Für jeden Baum T sei

$$w_{ab}^{(T)} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (a, b) \text{ auf gerichtetem } s - t \text{ Pfad} \\ -1 & \text{wenn } (b, a) \text{ auf gerichtetem } s - t \text{ Pfad} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schicken wir eine Flusseinheit auf dem $s - t$ -Pfad aus T , dann hat jede Kante den Flusswert

$$w_{ab} = \sum_T w_{ab}^{(T)} = N(s, a, b, t) - N(s, b, a, t),$$

wobei der erste Wert die Anzahl der Flusseinheiten angibt, die in Richtung ab fließen und der zweite Wert die Anzahl der Flusseinheiten, die wieder zurückfließen.

z.z: die so definierten Werte auf den Kanten sind ein Fluss.

1. Die Flusserhaltung ist für jeden Pfad trivial und wird von Summen erhalten.

2. Potentialgesetz: z.z. Für jeden Kreis x_1, \dots, x_k, x_1 in G soll gelten:

$$\sum_{i=1}^k p_{x_i x_{i+1}} = \sum_{i=1}^k \frac{w_{x_i x_{i+1}}}{r_{x_i x_{i+1}}} = \sum_{i=1}^k w_{x_i x_{i+1}} = 0.$$

Dafür brauchen wir den Begriff Dickicht. Ein *Dickicht* ist ein aufspannender Wald (jeder Knoten liegt in genau einem Teilbaum des Waldes), der aus genau zwei Komponenten F_s, F_t besteht mit $s \in F_s$ und $t \in F_t$.

Beobachtung: Für jede Kante (x, y) entspricht der Wert $N(s, x, y, t)$ der Anzahl der Dickichte mit $x \in F_s$ und $y \in F_t$, weil man durch Hinzufügen der Kante (x, y) in ein solches Dickicht einen aufspannenden Baum erhält, der von $N(s, x, y, t)$ gezählt wird. Umgekehrt gilt es genauso: Hat man einen aufspannenden Baum, der einen

$s - t$ -Weg mit der Kante (x, y) enthält und entfernt die Kante (x, y) , so erhält man ein Dickicht mit $x \in F_s$ und $y \in F_t$.

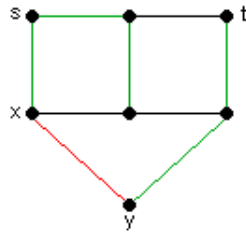


ABBILDUNG 52. Ein Dickicht mit der Kante $\{x, y\}$ wird ein aufspannender Baum

Idee: Für ein festes Dickicht F ist der Beitrag zum Fluss im Kreis $x_1, x_2, \dots, x_k, x_1$ gerade: Anzahl der Kanten (x_i, x_{i+1}) mit $x_i \in F_s$ und $x_{i+1} \in F_t$ minus Anzahl der Kanten (x_i, x_{i+1}) mit $x_i \in F_t$ und $x_{i+1} \in F_s$. Diese Differenz muss 0 sein.

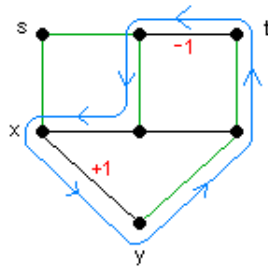


ABBILDUNG 53. Beitrag des Dickichts zum Kreisfluss

Der Fluss im Kreis ist Summe von Beiträgen von Dickichten, also 0.
 Formal: Für Dickicht F sei

$$w_{ab}^{(F)} := \begin{cases} w_{ab}^{(F+(a,b))} & \text{falls } F + (a, b) \text{ ein Baum} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sum_T w_{ab}^{(T)} = \sum_F w_{ab}^{(F)},$$

wegen der Beobachtung zu $N(s, x, y, t)$. Also gilt für den Kreis x_1, \dots, x_k, x_1

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k w_{x_i x_{i+1}} &= \sum_{i=1}^k \sum_T w_{x_i x_{i+1}}^{(T)} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_F w_{x_i x_{i+1}}^{(F)} \\ &= \sum_F \sum_{i=1}^k w_{x_i x_{i+1}}^{(F)} \\ &= \sum_F 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Note 7.9. Der Beweis und somit auch der Satz kann so modifiziert werden, dass er für allgemeine Widerstände funktioniert. Definiere dazu das *Gewicht* eines Baumes T als $w^{(T)} = \prod_{e \in T} \frac{1}{r_e}$, und dann weiter wie gehabt mit

$$w_{ab}^{(T)} = \begin{cases} w^{(T)} & \text{wenn } T \in N(s, a, b, t) \\ -w^{(T)} & \text{wenn } T \in N(s, b, a, t) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $w_{ab} = \sum_T w_{ab}^{(T)}$. Dass die Flusserhaltung gilt ist klar, und das Potentialgesetz funktioniert auch: Baumgewichte sind so gewählt, dass das gerade hinhaut...

Conclusion 7.10. Wenn die Widerstände in einem Netz mit s und t alle rational sind, folgt: Wenn eine Einheit Fluss durch das Netz geschickt wird, dann sind alle Flüsse auf den Kanten und alle Potentiale auf den Knoten rational (bei $V_t = 0$).

7.5. Squaring a square. Gegeben sei ein Rechteck und wir wollen es mit Quadraten pflastern, wobei die Quadrate jeweils unterschiedliche Größen haben und ganzzahlig sind. 1925 hat Moron für ein 32×33 großes Rechteck eine solche Zerlegung gefunden. (Das kleinste gefundene Quadrat, das in Quadrate aufgeteilt werden kann, hat die Seitenlängen 112 und wird mit 21 kleineren Quadraten gefüllt.)

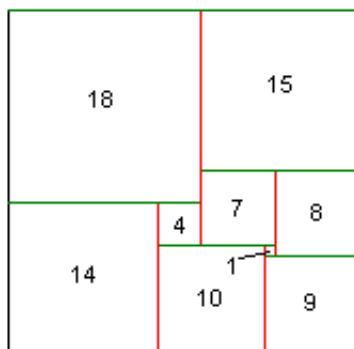


ABBILDUNG 54. Das Rechteck von Moron und seine Zerlegung

Im Jahr 1940 konnte ein Zusammenhang zwischen diesem Problem und elektronischen Netzen hergestellt werden. Dazu betrachtet man folgende anschauliche

Modellierung: Das ganze Rechteck besteht aus schwach leitenden Materialien. Oben und unten wird eine Silberkante angebracht und zwischen den Kanten eine Spannung von "Höhe" Volt angelegt. Im Fall von Moron also 32 Volt. Definieren wir das Potential der Unterkante als 0, dann ist das Potential in einem Punkt im Rechteck gerade die y -Koordinate. Weiter betrachten wir die folgende Konstruktion: an die vertikalen Seiten der Quadrate legen wir einen dünnen Streifen nicht-leitendes Material. Die Quadrate werden also isoliert und repräsentieren später die Kanten unseres Netzwerks. An die horizontalen Seiten der Quadrate legen wir Silberstreifen, die sehr gut leiten. Diese bilden die Knoten im Netzwerk. Jedes Quadrat ist Leiter zwischen den Silberstreifen.

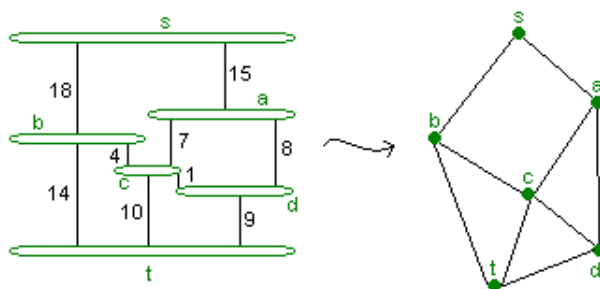


ABBILDUNG 55. Moron-Rechteck als elektrisches Netzwerk

Example 7.11. Für das Moron-Rechteck ergeben sich dann die Potentiale: $V_s = 32, V_a = 17, V_b = 14, V_c = 10, V_d = 9$ und $V_t = 0$.

Zu dem elektrischen Netzwerk wollen wir noch Widerstände hinzufügen. Dabei stoßen wir auf folgende Regeln:

1. Haben wir zwei Quadrate, die nebeneinander liegen, so entspricht dies einer Parallelschaltung. Die Leitfähigkeit ($= 1/\text{Widerstand}$) ist also proportional zur Breite.

2. Liegen zwei Quadrate übereinander, so entspricht dies einer Serienschaltung und wir erhalten, dass der Widerstand proportional zur Höhe ist.

Aus 1. und 2. folgt, dass alle Quadrate den Widerstand 1 haben.

Haben wir also ein ebenes Netz mit s, t und Widerständen 1 gegeben, bekommen wir ein Squaring aus den Potentialen. (Die Potentialdifferenzen der Kanten sind Quadratlängen). Die Gestalt des Rechtecks ist durch den effektiven Widerstand gegeben. Ist er 1, dann handelt es sich um ein Quadrat, ansonst stellt er ein Rechteck dar. Allerdings sind die beiden Bedingungen "Seitenlängen unterschiedlich" und "ganzzahlig", nur durch Zufall erfüllt...

Conclusion 7.12. [Dehn, 1903] Wenn ein Rechteck sich in endlich viele Quadrate zerlegen lässt, dann ist das Seitenverhältnis rational.

Beweis. Das Seitenverhältnis ist der effektive Widerstand des assoziierten Netzes. Der ist, da alle Widerstände der Quadrate 1 sind, rational. \square

7.6. Pflasterungen (Tilings). Pflasterungen sind eine Verallgemeinerung des Squarings. Gegeben ist ein Rechteck und man möchte es mit kleineren Rechtecken, überdecken. Ein spezieller Fall sind Dominotilings:



ABBILDUNG 56. Dominosteine überdecken ein 6×7 -Rechteck

Eine Pflasterung eines $a \times b$ Rechtecks mit Dominosteinen ist genau dann möglich, wenn a oder/und b gerade sind.

Ein weiterer Fall sind Tilings mit 1×8 -Steinen: Ein Rechteck lässt sich nur dann mit 1×8 Steinen pflastern, wenn eine oder beide Seitenlängen durch 8 teilbar sind. Dieses Problem ist ein Spezialfall des Folgenden:

Theorem 7.13. *Wenn ein Rechteck T mit Teilen T_1, \dots, T_k gepflastert werden kann, und alle T_i eine Seite ganzzahliger Länge haben, dann hat T eine Seite ganzzahliger Länge.*

Beweis. Es gibt mindestens 14 unterschiedliche Beweise für diesen Satz. Wir betrachten drei.

I. Beweis: Graphentheoretisch

Auf jedem T_i definiere einen Graphen, wobei die Knoten die Ecken von T_i sind und die Kanten zwei ganzzahlige gegenüberliegende Seiten von T_i .

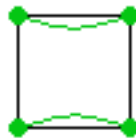


ABBILDUNG 57. Aus T_i entsteht ein Graph

Sei T gepflastert mit T_i dann bildet die Konstruktion einen Multigraphen in T .

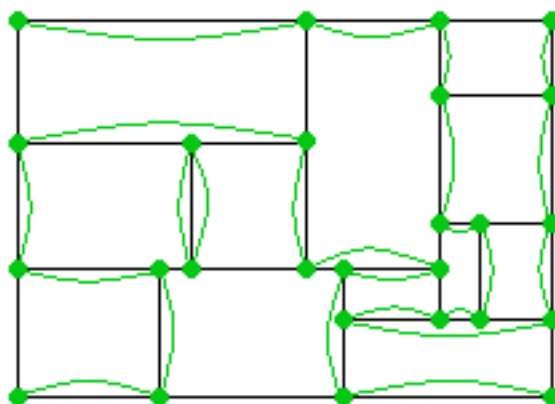


ABBILDUNG 58. Aus den von T_i induzierten Graphen ergibt sich ein Multigraph auf T

Für jedes Rechteck in diesem Beispiel müssen wir uns zwei Seiten aussuchen, die ganzzahlig sind. Dabei ist die Wahl beliebig. Dieser Multigraph auf T hat folgende Eigenschaften: der Grad jedes inneren Knotens ist entweder zwei oder vier. Die äusseren Ecken haben Grad 1. Daraus folgt: es gibt einen Weg W zwischen zwei Ecken von T , da die inneren Knoten geraden Grad haben, d.h. wir können nirgendwo stecken bleiben, und müssen also ausgehend von einer Ecke in einer anderen Ecke landen. Der Weg W kann in horizontale und vertikale Stücke zerteilt werden. Summieren wir nur die horizontalen Stücke, so erhalten wir die Seitenlänge von dem Rechteck als Summe von ganzzahligen Kanten, also ist die Seitenlänge ganzzahlig.

Beweis II. Analytisch.

T habe die Ecken $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) . Wir wollen zeigen, dass a oder b aus \mathbb{N} ist.

Sei $F(x, y) = \sin 2\pi x \sin 2\pi y$ eine Funktion. Der Sinus hat die Periode 2π , und da wir x und y mit 2π multiplizieren, erhalten wir Periode 1. Wir werden sehen, dass $\forall i$ gilt:

$$\int_{T_i} \int F(x, y) dx dy = 0$$

wegen der Periodizität 1. Wenn T_i ganzzahlige x -Seite hat (mit den Ecken a_1, a_2 horizontal und b_1, b_2 vertikal), dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{T_i} \int F(x, y) dx dy &= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \sin 2\pi y dy \right) \sin 2\pi x dx \\ &= c \int_{a_1}^{a_2} \sin 2\pi x dx = c [-c' (\cos 2\pi x)]_{a_1}^{a_2} \end{aligned}$$

Für ganzzahlige Werte x ist $\cos 2\pi x$ immer 1, also ist das Integral gleich Null. Daraus folgt

$$\int_T \int F(x, y) dx dy = \sum_i \int_{T_i} \int F(x, y) dx dy = 0,$$

und

$$\begin{aligned} \int_T \int F(x, y) dx dy &= \int_0^a \int_0^b F(x, y) dx dy \\ &= \left(\int_0^a \sin 2\pi x dx \right) \left(\int_0^b \sin 2\pi y dy \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 (1 - \cos 2\pi a) (1 - \cos 2\pi b) \\ &\stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

also muss a oder b ganzzahlig sein, damit einer der Faktoren 0 ist.

Beweis III. Diskretisierung des obigen Arguments

Idee: Betrachte Schachbrett mit Seitenlänge $\frac{1}{2}$. Für jedes T_i gilt: die Flächenanteile in weiß und schwarz sind gleich, weil eine Seite ganzzahlig ist. Diese Eigenschaft hat damit auch T . Wie muss also ein Rechteck aussehen, damit es gleichviel schwarz- und weiß-Anteil hat? Sei $b = [b] + \underbrace{(b - [b])}_{r_b}$. Wir betrachten als erstes den Teil

$[b] \times a$. Hier gilt, dass der Anteil von schwarz und weiß gleich ist. Betrachte r_b in Abhängigkeit vom Weißüberschuss. Wir erhalten eine periodische Funktion mit der Periode 1. Bis $1/2$ wächst der Weißüberschuss, ab dann sinkt er wieder auf 0. Betrachten wir nun $a - [a]$, dann liefert uns diese Ecke einen echten Weißüberschuss, wenn $a - [a]$ nicht Null ist, also a nicht ganzzahlig ist. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass alle T_i und damit auch T gleiche Schwarz- und Weißanteile haben. \square

8. KREISE, SCHNITTE, VEKTORRÄUME

8.1. Knoten- und Kantenraum. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und m Kanten, Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Betrachte nun Vektorräume über \mathbb{F}_2 . Der *Knotenraum* ist ein Vektorraum der Dimension n im \mathbb{F}_2 , also $\mathbb{F}_2^n = 2^V$. Ein Vektor $x \in \mathbb{F}_2^n$ wird aufgefasst als charakteristischer Vektor einer Teilmenge X von V . Umgekehrt können wir jeder Teilmenge von V einen charakteristischen Vektor zuordnen. Wir haben also eine Bijektion. Der *Kantenraum* ist ein Vektorraum der Dimension m im \mathbb{F}_2 , also $\mathbb{F}_2^m = 2^E$, und $y \in \mathbb{F}_2^m$ entspricht wieder einer Teilmenge Y von E . (Im Allgemeinen interessiert uns der Kantenraum mehr als der Knotenraum.)

Es gilt: $\dim(2^V) = n$. Standardbasis $e_i \leftrightarrow v_i$, also der charakteristische Vektor eines Knotens v_i , ist ein Vektor der Standardbasis. Für den Kantenraum gilt das gleiche: $\dim(2^E) = m$ mit Standardbasis $e_i \leftrightarrow e_i$. (Einheitsvektor \longleftrightarrow Kante) Das *innere Produkt* über \mathbb{F}_2 ist definiert als

$$\langle w, w' \rangle = \sum_i w_i w'_i = \begin{cases} 1 & w \text{ und } w' \text{ haben gemeinsame 1 an ungerade vielen Stellen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn F ein Unterraum von \mathbb{F}_2^d ist, dann ist $F^\perp := \{z \in \mathbb{F}_2^d \mid \langle z, w \rangle = 0, \forall w \in F\}$ der *Orthogonalraum* zu F . Es gilt: F^\perp ist Unterraum und $\dim F + \dim F^\perp = d$. (siehe Übung!)

8.2. Zyklenraum. Der *Zykelraum* $Z \subseteq 2^E$ ist das Erzeugnis der charakteristischen Vektoren von Kreisen in G , wobei ein *Kreis* ein geschlossener Kantenzug ohne Kantenviederholung ist. Ein *einfacher Kreis* ist ein Kreis ohne Knotenviederholung. Die Elemente von Z heißen *Zykeln*. (Achtung hier ist nicht die Def. von Zyklen aus den vorherigen Kapiteln gemeint...) Die Dimension von Z ist die *zyklomatische Zahl*. *Einfach induzierte Kreise* sind Kreise, die durch eine Knotenmenge induziert werden und einfache Kreise bilden.

Proposition 8.1. *Der Zykelraum Z wird von einfachen induzierten Kreisen erzeugt.*

Beweis. Sei C ein nicht einfacher Kreis,

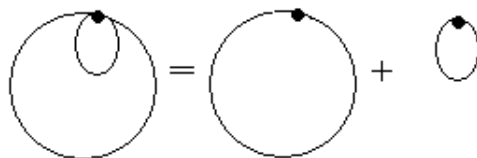


ABBILDUNG 59. Darstellung eines Kreises durch einfache Kreise

dann kann man C als die Summe von einfachen Kreisen C_i darstellen. Also gilt $x_C = \sum_{i=1}^n x_{C_i}$.

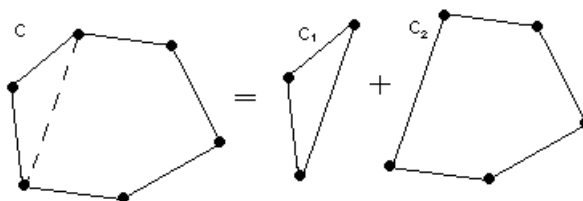


ABBILDUNG 60. Der Kreis C ist nicht induziert, kann aber mit der Hilfe von zwei einfachen induzierten Kreisen dargestellt werden

Sei ein Kreis C nicht induziert. Dann gibt es eine Sehne in dem Kreis und C zerfällt in zwei Kreise C_1 und C_2 , die diese Kante enthalten. Bei Addition fällt sie also weg. \square

Proposition 8.2. *Eine Teilmenge $F \subseteq E$ ist genau dann ein Zykel, d.h. $x_F \in Z$ wenn (V, F) ein eulerscher Graph ist.*

Beweis. Ein Graph ist genau dann eulersch, wenn alle Knotengrade gerade sind.

" \Rightarrow " Betrachte einen Knoten v . Sei $x_F = \sum_i x_{C_i}$. Für jedes C_i gilt: es hat 0 oder 2 Kanten an dem Knoten v . Daraus folgt, dass alle Knoten v im Zykel F geraden Grad haben. Also ist (V, F) eulersch.

" \Leftarrow " Finde einen Kreis C in F durch weitergehen, dann hat $F \setminus C$ nur gerade Grade und kann als Summe von Kreisen geschrieben werden. (Induktion). Also ist F als Summe von Kreisen darstellbar. Damit ist F ein Zykel. \square

8.3. Schnittraum. Sei $X \subset V$ und $\bar{X} = V \setminus X$ das Komplement. Dann ist der *Schnitt* (X, \bar{X}) die Kantenmenge, die X und \bar{X} verbindet. Der *Schnittraum* $S \subseteq 2^E$ wird definiert als das Erzeugnis der charakteristischen Vektoren von Schnitten (X, \bar{X}) in G .

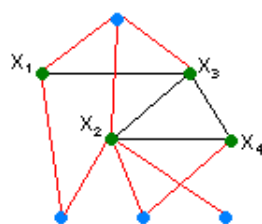


ABBILDUNG 61. Ein Schnitt zwischen der grünen und blauen Menge.

Proposition 8.3. *Der Schnittraum S wird von den Schnitten $(v, V \setminus v)$ erzeugt.*

Beweis. Sei (X, \bar{X}) ein Schnitt. Für die charakteristischen Vektoren y gilt: $y_{(X, \bar{X})} = \sum_{x \in X} y_{(x, V \setminus x)}$. Kanten, die zwei Knoten in X verbinden, treten rechts zwei mal auf, Kanten, die Knoten in \bar{X} verbinden treten nicht auf, und (x, \bar{x}) -Kanten treten genau ein mal auf.

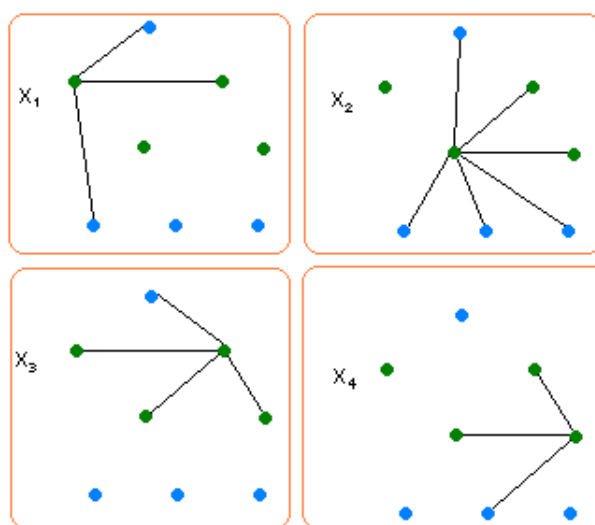


ABBILDUNG 62. Jeder Schnitt kann durch $(x, V \setminus x)$ -Schnitte erzeugt werden

□

Proposition 8.4. *Es gilt $S = Z^\perp$ und $Z = S^\perp$. (Die beiden Aussagen sind äquivalent, da $(U^\perp)^\perp = U$).*

Note. Diese Proposition beschreibt die Dualität zwischen Schnitten und Kreisen.

Beweis. Sei C ein Kreis und S ein Schnitt, dann folgt: $|C \cap S|$ ist gerade. Also ist für alle $x \in Z$ und $y \in S$ das innere Produkt $\langle x, y \rangle = 0$, wegen der Linearität des inneren Produktes. Genauer: $x = \sum x_C$ und $y = \sum y_S$. Dann gilt $\langle x, y \rangle = \langle \sum x_C, \sum y_S \rangle = \sum_C \sum_S \langle x_C, y_S \rangle = 0$, wegen geradem Durchschnitt von C und S . Also ist $Z \subseteq S^\perp$ und $S \subseteq Z^\perp$.

Wir müssen noch die Gleichheit zeigen. Sei D Kantenmenge mit $x_D \notin Z$, und wir zeigen $x_D \notin S^\perp$: Es existiert ein Knoten $v \in V$ mit $\deg_D(v)$ ungerade. Betrachte $y_{(v, V \setminus v)}$. Dann gilt $\langle x_D, y_{(v, V \setminus v)} \rangle = |D \cap E_v| \pmod 2 = 1$. Daraus folgt $Z = S^\perp$. Da $Z^\perp = (S^\perp)^\perp = S$ folgt auch die zweite Aussage. \square

Theorem 8.5. [Kreis-Schnitt-Baum-Theorem] Sei G ein Graph mit k Komponenten G_1, \dots, G_k , dann ist

$$\dim Z = m - n + k$$

und

$$\dim S = n - k.$$

Beweis. Sei T ein aufspannender Wald, der in jeder Komponente ein Baum T_i ist. T hat dann $n - k$ Kanten. Für jede Kante $e \in T$ definiere einen Schnitt: $T_i \setminus e$ hat zwei Zusammenhangskomponenten X_i und \bar{X}_i in G_i und (X_i, \bar{X}_i) ist Schnitt. Da jede der Kanten von T nur in genau einem der so definierten Schnitte vorkommt, gilt: $\dim(S) \geq n - k$.

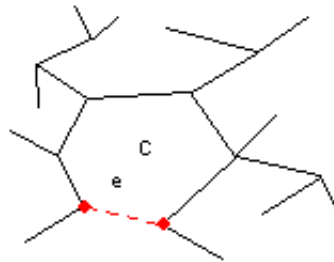


ABBILDUNG 63. Jede Nichtbaumkante definiert einen Kreis

Für alle $e \notin T$ definiere einen Kreis: Sei C der eindeutige einfache Kreis in $T \cup \{e\}$. Es gibt $m - (n - k)$ Kanten, die nicht in T sind. Also $\dim(Z) \geq m - n + k$, weil die charakteristischen Vektoren von den Schnitten und Kreisen jeweils linear unabhängig sind.

	Z	S	
E	$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix}$	E
T	$\begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix}$	T

ABBILDUNG 64. Darstellung einer Matrix aus den charakteristischen Vektoren der Elementarkreise und Elementarschnitte

Aus $\dim Z \geq m - n + k$ und $\dim S \geq n - k$ und $S = Z^\perp$ folgt Gleichheit in beiden Ungleichungen. \square

Note 8.6. Es gilt im allgemeinen $S \cap Z \neq \emptyset$.

Example 8.7. Beispiel, dass ein Kantenzug sowohl Schnitt, als auch Kreis ist.

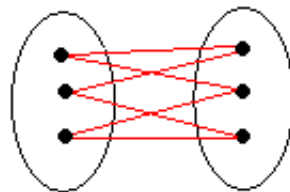


ABBILDUNG 65. Ein Kantenzug kann sowohl einen Schnitt als auch einen Kreis darstellen.

9. MINIMAL AUFSPANNENDE BÄUME

Wir betrachten MST-Probleme (die Abkürzung MST steht für minimum spanning tree): Gegeben sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Außerdem ist eine Kostenfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ gegeben. Gesucht ist ein aufspannender Teilgraph $H = (V, F)$ minimalen Gewichtes, wobei das Gewicht von H definiert ist als: $w(H) := \sum_{e \in F} w(e)$.

Note 9.1. Die (optimale) Lösung ist kreisfrei, also ein Baum. Hätte man einen Kreis, könnte man natürlich eine beliebige Kante des Kreises löschen, behält einen aufspannenden Teilgraphen, der aber ein echt kleineres Gewicht hat.

In der Praxis gibt es viele Anwendungsbereiche des MST-Problems:

- Kostengünstige Verbindungsnetze
- Information an Geheimagenten verteilen
- Cluster Analyse

Eine Greedy (gierig, wenn sie lokal das beste tut) Methode für MST

Färben von Kanten des Eingabegraphen $G = (V, E)$ mit zwei Farben (rot/blau) nach gegebenen Regeln, so dass:

Invariante: Es gibt einen MST von G , der alle blauen und keine roten Kanten enthält.

Wir müssen jetzt also paraktikable Regeln finden, die diese Invariante gewährleistet.

9.1. Färbungsregeln:

- (1) Die blaue Regel: Wähle Schnitt (X, \bar{X}) , in dem noch keine Kante blau ist. Färbe die leichteste ungefärbte Kante des Schnittes blau.
- (2) Die rote Regel: Wähle Kreis C in dem noch keine Kante rot ist. Färbe die schwerste ungefärbte Kante des Kreises rot.

Example 9.2. Betrachte den folgenden Graphen.

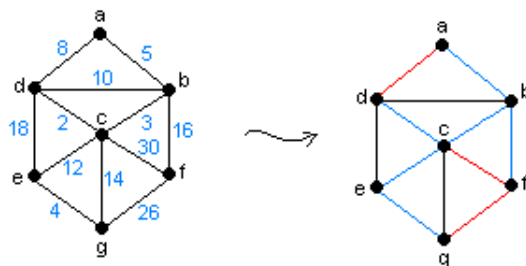


ABBILDUNG 66. An dem Graphen wurden rote und blaue Regel angewandt

Wir wollen im folgenden die rote und die blaue Regel anwenden. Wir beginnen mit der blauen Regel für den Schnitt a und färben die Kante (a, b) blau. Wende noch mal die blaue Regel auf Schnitt b an und färbe (c, b) blau. Jetzt betrachten wir die rote Regel für den Kreis (a, b, c, d) und färben die Kante (d, a) rot. Wende wieder die rote Regel für (e, f, g, b, d) an, und färbe Kante (f, g) rot. Die blaue Regel auf (g, f) ergibt (e, g) wird blau. Mit der roten Regel auf (b, f, c) wird die Kante (f, c) rot. Mit blauer Regel für f ergibt sich (b, f) blau und mit blauer Regel auf d ergibt sich (c, d) blau. Als letztes noch die blaue Regel auf e ergibt die letzte blaue Kante (c, e) .

Theorem 9.3. 1. Die Färbungsregeln erhalten die Invariante.

2. Solange nicht alle Kanten gefärbt sind, ist eine Färbungsregel anwendbar.

Beweis. (2): Wir zeigen zunächst (2) unter Verwendung von (1).

Sei e ungefärbt und T ein MST, der alle blauen und keine rote Kante enthält. Die Existenz dieses Baumes folgt aus Teil (1). Betrachte zwei Fälle:

1. Fall: $e \in T$: Dann folgt: das Löschen von e aus T definiert einen Schnitt ohne Baumkante, also ohne blaue Kante. Der Schnitt enthält eine ungefärbte Kante, also kann die blaue Regel angewandt werden.

2. Fall: $e \notin T$: Dann definiert $T \cup \{e\}$ einen Kreis, der nur blaue und ungefärbte Kanten enthält. Also ist die rote Regel anwendbar.

(1): 1. Teil: Die Invariante für die blaue Regel mit Induktion:

Sei T ein MST, der alle bisher blauen und keine roten Kanten enthält. (Induktionsvoraussetzung). Die Kante e wird wegen des Schnittes (X, \bar{X}) blau gefärbt. Wir wollen zeigen, dass diese Kante auch in T ist. Angenommen $e \notin T$. Betrachte $T \cup e$, sei C der Kreis in $T \cup e$. Wegen $e \in C$ und $e \in (X, \bar{X})$ gibt es eine weitere Kante f mit diesen Eigenschaften: Die Kante f ist eine Baumkante, weil $f \neq e$ und $f \in C$ wobei C bis auf e nur aus Baumkanten besteht. Außerdem ist $w(f) \geq w(e)$ wegen der Wahl von e durch die blaue Regel. Betrachte den Baum $T' = T + e - f$. Dann gilt aber

$$w(T') = w(T) + w(e) - w(f) \leq w(T).$$

Also gibt es einen MST, der nur aus den bisherigen blauen Kanten, der Kante e und keinen roten Kanten besteht. Da T MST ist, gilt $w(T') \geq w(T)$ also $w(T') = w(T)$. T' ist ein MST, der zur Invariante passt, und $w(e) = w(f)$. An dem Beweis sieht man: im Fall, dass alle Gewichte verschieden sind, gibt es einen eindeutig leichtesten Baum.

2. Teil: Die Invariante für die rote Regel ebenfalls mit Induktion:

Sei T ein MST, der alle blauen und keine bisher rot gefärbte Kante enthält. Die Kante e wird wegen des Kreises C rot gefärbt. Angenommen: $e \in T$. Betrachte $T - e$ und den durch $T - e$ definierten Schnitt (X, \bar{X}) . Wegen $e \in C$ und $e \in (X, \bar{X})$ gibt

es eine weitere Kante $f \in C \cap (X, \overline{X})$: Also ist $f \notin T$ und f ist ungefärbt in dem Augenblick, in dem wir e färben. Daraus folgt $w(f) \leq w(e)$. Also ist $T' = T - e + f$ ein Baum und $w(T') = w(T) - w(e) + w(f) \leq w(T)$. Also ist T' ein MST, der alle blauen und keine rote Kante enthält. \square

9.2. Algorithmen. Als nächstes betrachten wir konkrete Algorithmen zur Lösung des MST- Problems, die allerdings nur die blaue Regel verwenden.

(1) Algorithmus von Boruvka.

Idee: Verwalte einen Wald. Am Anfang ist jeder Knoten für sich eine Komponente. In jeder Phase wählt jede Komponente (X_i, F_i) die leichteste Kante im Schnitt $(X_i, \overline{X_i})$. Mit diesen zusätzlichen Kanten werden neue Komponenten berechnet.

Korrektheit folgt aus der blauen Regel, weil im Schnitt $(X_i, \overline{X_i})$ noch keine blaue Kante existiert. Außerdem bleiben sie kreisfrei in jeder Phase, weil Gewichte entlang von Wegen, die verschiedene Komponenten verbinden, abnehmen.

Beispiel:

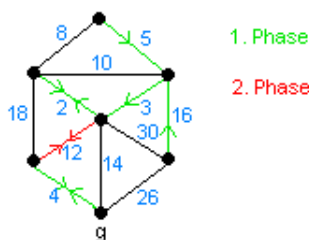


ABBILDUNG 67. Hier sieht man die Anwendung des Algorithmus von Boruvka

Die Laufzeit des Algorithmus:

Die Anzahl der Phase: Jede neue Komponente K_{neu} enthält mindestens zwei alte Komponenten K_{alt} . Also ist $\#(K_{neu}) \leq \frac{\#(K_{alt})}{2}$. Die Anzahl der Phasen p lässt sich dann abschätzen mit $p \leq \log n$. Jede Phase kann in $\mathcal{O}(m)$ realisiert werden. Insgesamt erhalten wir eine Laufzeit von $\mathcal{O}(m \log n)$, mit mehr Aufwand $\mathcal{O}(m \log(\log n))$, Randomisiert $\mathcal{O}(m+n)$ erwartete Laufzeit.

Note 9.4. Die große Frage bei MST Algorithmen ist, ob es in $\mathcal{O}(m+n)$ auch einen deterministischen Algorithmus gibt.

(2) Algorithmus von Kruskal

Sortiert Kanten nach aufsteigendem Gewicht: $E = e_1, e_2, \dots, e_m$ mit $w(e_i) \leq w(e_j)$ für $i < j$.

$T_0 = \emptyset$

for $k = 1$ to m

if $T_{k-1} + e_k$ kreisfrei then $T_k \leftarrow T_{k-1} + e_k$

else $T_k \leftarrow T_{k-1}$

return T_m

Beispiel:

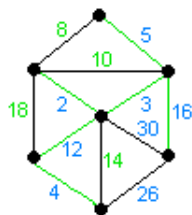


ABBILDUNG 68. Anwendung des Algorithmus von Kruskal

Korrektheit: mit blauer Regel.

Die Laufzeit des Algorithmus:

Das Sortieren der Kanten kostet $\mathcal{O}(m \log m)$, also schon schlechter als beim Algorithmus von Borurka. Wenn die Komponenten mit einer guten Datenstruktur (Union Find) verwaltet werden, dann geht der Hauptteil in $\mathcal{O}(m \log n)$ oder schneller.

(3) Algorithmus von Prim (Jarnik):

Wähle Startknoten $s \in V$.

Wähle in jedem Schritt die leichteste Kante in (X, \bar{X}) , wobei X die Menge der schon mit s verbundenen Knoten ist und gib diese Kante zum wachsenden Baum hinzu.

Beispiel:

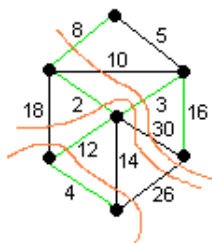


ABBILDUNG 69. Anwendung des Algorithmus von Prim.

Die Laufzeit des Algorithmus: Wenn die aktuellen Schnittkanten in einem Heap verwalten. Wir brauchen also $\sum deg(v)$ Heapoperationen, also $\mathcal{O}(m \log n)$ Aufwand.

10. MATROIDE

10.1. Axiome für unabhängige Mengen.

Definition 10.1. Eine Mengenfamilie $J \subseteq 2^S = Pot(S)$ ist die Familie der unabhängigen Mengen eines Matroids, wenn gilt

$$(I_0) \emptyset \in J$$

$$(I_1) I \in J \text{ und } L \subseteq I \text{ dann } L \in J$$

$$(I_2) \text{ Sind } I, L \in J \text{ mit } |I| = |L| + 1, \text{ dann } \exists x \in I \setminus L \text{ mit } L + x \in J$$

10.2. Beispiele.

Example 10.2. Beispiele für Matroide

- (1) Sei V Vektorraum, $S \subset V$ und $I \subset S$ sei in $J \Leftrightarrow$ die Vektoren in I sind linear unabhängig.

Behauptung: J ist ein Matroid.

Beweis: $(I_0), (I_1)$ klar, und (I_2) mit Basisergänzungssatz. Dieses Matroid gehört in die Klasse der "linearen Matroide".

- (2) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $I \subseteq E$ sei in $J \Leftrightarrow$ die Kantenmenge ist kreisfrei. Die unabhängigen Mengen sind also Kantenmengen von Wäldern.

Behauptung: J ist ein Matroid.

Beweis: $(I_0), (I_1)$ sind klar.

(I_2) : Beispiel:

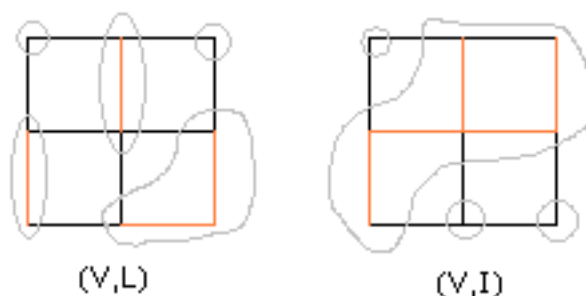


ABBILDUNG 70. Aus dem Wald (V, I) kann noch eine Kante in den Wald (V, L) eingefügt werden, ohne dass dieser die Kreisfreiheit verliert

Der Wald (V, L) hat mehr Komponenten als der Wald (V, I) . Daraus folgt, es gibt eine Komponente K in (V, I) , die nicht ganz in einer Komponente aus (V, L) enthalten ist. Sei M eine Komponente von (V, L) , die K schneidet, dann definiert M einen Schnitt, dessen Kanten mit (V, L) kreisfrei sind. Eine dieser Kanten muss in I liegen. \square

Matroide dieser Art nennt man "graphische Matroide".

- (3) Sei S eine Menge A_1, \dots, A_m Teilmengen von S . Eine Teilmenge $I \subseteq S$ sei in $J \Leftrightarrow \exists$ eine injektive Funktion $\varphi_I : I \rightarrow \{1, \dots, m\}$ mit $x \in A_{\varphi_I(x)} \forall x \in I$.

Beispiel:

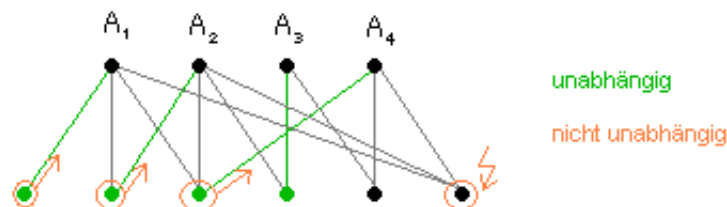


ABBILDUNG 71. Beispiel einer injektiven Abbildung von Knoten auf Mengen

Behauptung: J ist ein Matroid.
 Beweis: (I_0) , (I_1) klar. (I_2)



ABBILDUNG 72. Beweisidee für I_2 .

\exists ein $i \in \varphi_I(I) \setminus \varphi_J(J) \dots$ durch wiederholtes Austauschen gelangt man ans Ziel.

Diese Art von Matroiden nennt man auch *Transversal-Matroide*.

10.3. Der Matroid-Greedy-Algorithmus. Sei $M = (S, J)$ ein Matroid mit einer Gewichtsfunktion $w : S \rightarrow \mathbb{R}^+$. Diese Gewichtsfunktion wird fortgesetzt auf alle Teilmengen T von S durch

$$w(T) := \sum_{x \in T} w(x).$$

Gesucht ist eine unabhängige Menge maximalen Gewichts. Es ist nicht sinnvoll alle unabhängigen Mengen zu betrachten und daraus die mit dem maximalen Gewicht zu betrachten, weil dies sehr viele sein können. Außerdem betrachten wir hier ein Matroid mit einem Orakel, das uns bei jeder Menge sagt: ist unabhängig oder ist nicht unabhängig.

Note 10.3. Äquivalent dazu wäre auch die Suche nach einer maximal unabhängigen Menge minimalen Gewichts.

Der Greedy-Algorithmus leistet das gewünschte.

Der Greedy-Algorithmus:

Sortiere S nach absteigendem Gewicht, $w(s_1) \geq w(s_2) \geq \dots \geq w(s_m)$.

$I_0 \leftarrow \emptyset$

for $k = 1$ to m

if $(I_{k-1} \cup \{s_k\}) \in J$ (Orakel) then $I_k \leftarrow I_{k-1} \cup \{s_k\}$

else $I_k \leftarrow I_{k-1}$

return I_m

Definition 10.4. Eine *Basis* eines Matroid M ist eine maximale unabhängige Menge.

Example 10.5. In linearen Matroiden sind die Basen linear unabhängige Vektoren, die das Matroid (Vektorraum) komplett aufspannen (Def. wie allgemein üblich). In graphischen Matroiden von zusammenhängenden Graphen sind die Basen Bäume.

Note 10.6. Je zwei maximal unabhängige Mengen in einem Matroid haben dieselbe Kardinalität. Dies folgt unmittelbar aus I_2 .

Theorem 10.7. Die vom Greedyalgorithmus ausgegebene Menge I_m ist eine Basis.

Beweis. Angenommen $\exists I_m \subsetneq I$ mit $I \in J$. Sei i minimal mit $s_i \in I$ und $s_i \notin I_m$. Dann ist $I_{i-1} \cup s_i$ abhängig, weil s_i nicht von Greedy genommen wurde. Aber $I_{i-1} \cup s_i \subseteq I$, also ist $I_{i-1} \cup s_i$ unabhängig nach (I_1) . Widerspruch. \square

Theorem 10.8. Ist $M = (S, J)$ ein Matroid, $w : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Gewichtsfunktion, dann berechnet der Greedy-Algorithmus eine unabhängige Menge maximalen Gewichts.

Beweis. Sei $I_m = \{s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}\}$ mit $(i_1 < i_2 < \dots < i_r)$ die Ausgabe aus dem Greedyalgorithmus. Sei \tilde{I} eine optimale Basis, die einen möglichst langen Anfangsabschnitt mit I_m gemeinsam hat, also

$$\tilde{I} = \{s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_r}\}$$

mit $(j_1 < j_2 < \dots < j_r)$.

Angenommen $\tilde{I} \neq I_m$, dann hat der gemeinsame Anfangsabschnitt eine Länge $k - 1 < r$, d.h. $s_{i_k} \neq s_{j_k}$. Weil i_k minimal mit der Eigenschaft: $\{s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}\} \cup \{s_{i_k}\}$ ist unabhängig, folgt daraus $j_k > i_k$, weil s_{i_k} das erste Element war, das wir nach dem Algorithmus zu der Menge $\{s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}\} = \{s_{j_1} \dots s_{j_{k-1}}\}$ hinzufügen konnten, so dass die Menge weiter unabhängig bleibt. Nach unserer Sortierung gilt nun $w(s_{j_k}) \leq w(s_{i_k})$. Zur Menge $\{s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}\}$ können wir so lange Elemente aus \tilde{I} hinzufügen, bis wir eine Basis \hat{I} erhalten. Das folgt aus dem Erweiterungsaxiom (I_2). Die Basis \hat{I} hat die Darstellung $\hat{I} = \tilde{I} + s_{i_k} - s_{j_l}$, wobei $l \geq k$ ist, da die ersten $k - 1$ Elemente von I_m und \tilde{I} identisch waren. Es gilt nach der Sortierung auch hier $w(s_{j_l}) \leq w(s_{j_k}) \leq w(s_{i_k})$, und es folgt $w(\hat{I}) = w(\tilde{I}) + w(s_{i_k}) - w(s_{j_l}) \geq w(\tilde{I})$. Also ist \hat{I} ebenfalls eine optimale Basis, weil sie wie \tilde{I} maximales Gewicht besitzt. Der Anfangsabschnitt, den \hat{I} mit I_m gemeinsam hat, ist länger als der von \tilde{I} . Wir erhalten einen Widerspruch! Die Menge I_m ist also selbst optimale Basis. \square

Note 10.9. Ein Unabhängigkeitssystem (S, J) , für das mit jeder Gewichtsfunktion w vom Greedy-Algorithmus eine unabhängige Menge maximalen Gewichts berechnet wird, ist ein Matroid.

10.4. Begriffe und Axiomensysteme. Ein kurzer Überblick über wichtige Begriffe und verschiedene Axiomensysteme im Zusammenhang mit Matroiden:

- Wir hatten ein Matroid $M = (S, J)$ über die *unabhängigen Mengen* definiert.
- Man kann ein Matroid dann natürlich auch über *abhängige Mengen* definieren.
- Weiter hatten wir *Basen*, also maximal unabhängige Mengen, betrachtet.
- *Kreise* sind dann minimal abhängige Mengen. Die Kreisaxiome betrachten wir unten.
- Wir können Matroide auch über die Rangfunktion $r = 2^S \rightarrow \mathbb{N}$ definieren. $r(A)$ ist die Kardinalität einer maximal unabhängigen Menge $I \subseteq A$. Auch die Rangaxiome werden unten näher erläutert.
- Das *Erzeugnis* einer Menge $A \subseteq S$: $\langle A \rangle$ ist die maximale Menge B , mit $A \subseteq B$ und $r(B) = r(A)$.
- Eine *abgeschlossene Menge* ist eine Menge A mit $A = \langle A \rangle$, also eine Menge, die schon maximal bezüglich ihres Ranges ist.

Die Kreis- und Rangaxiome wollen wir nun näher betrachten:

Definition 10.10. *Kreisaxiome:* $\mathcal{C} \subseteq 2^S$ ist genau dann die Kreisfamilie eines Matroids wenn gilt:

- (C_0) $\mathcal{C} \neq \{\emptyset\}$
- (C_1) Seien $C, C' \in \mathcal{C}$ und $C \neq C'$ dann gilt $C \not\subseteq C'$
- (C_2) Seien $C, C' \in \mathcal{C}$, $C \neq C'$ und $z \in C \cap C'$, dann gibt es ein $\tilde{C} \in \mathcal{C}$ mit $\tilde{C} \subseteq (C \cup C') - \{z\}$.

Example 10.11. Betrachte einen Kreis C mit $\sum_{i \in C} a_i v_i = 0$ und alle $a_i \neq 0$ und einen weiteren Kreis C' mit $\sum_{i \in C'} b_i w_i = 0$. Es gelte $v_1 = w_1$, dann gilt

$$\frac{1}{b_1} \left(\sum_{i \in C, i \neq 1} a_i v_i \right) = \frac{1}{a_1} \left(\sum_{i \in C, i \neq 1} b_i w_i \right).$$

Also ist (C_2) für lineare Matroide erfüllt.

Definition 10.12. Rangaxiome: Die Funktion $r : 2^S \rightarrow \mathbb{N}$ ist genau dann eine Rangfunktion eines Matroids wenn gilt

$$(R_0) \quad r(\emptyset) = 0$$

$$(R_1) \quad \text{Es gilt } r(X) \leq r(X + z) \leq r(X) + 1 \text{ für alle } X \subseteq S, z \in S.$$

$$(R_2) \quad \text{Wenn gilt } r(X + y) = r(X + z) = r(X) \text{ dann gilt } r(X + y + z) = r(X).$$

Man müsste jetzt zeigen, dass alle Axiomensysteme das gleiche leisten. Zum Beispiel:

Definiere die Menge $I \subseteq S$ als unabhängig wenn $r(I) = |I|$. Zeige I_0, I_1, I_2 sind erfüllt, wenn r die Rangaxiome erfüllt.

10.5. **Dualität.** Sei $M = (S, J)$ ein Matroid. Definiere eine Familie $J^* := \{I^* \subseteq S : \exists \text{ Basis } B \text{ von } M \text{ mit } I^* \subseteq S \setminus B\}$.

Theorem 10.13. *Das Tupel $M^* = (S, J^*)$ ist ein Matroid.*

Beweis. Wir wollen die drei Eigenschaften $(I_0), (I_1)$ und (I_2) überprüfen.

(I_0) : die leere Menge ist in J^* enthalten.

(I_1) : Wenn $I^* \in J^*$ dann gibt es ein B mit $I^* \subseteq \overline{B}$. Wenn $L^* \subseteq I^*$, so ist es auch in \overline{B} , also $I^* \subseteq J^*$.

(I_2) : Seien $I^*, L^* \in J^*$ und $|I^*| = k$ und $|L^*| = k - 1$. Zu zeigen: es existiert ein $x \in I^* \setminus L^*$ mit $L^* + x \in J^*$. Seien B_I und B_L Basen von M , dem primalen Matroid, mit $I^* \subseteq \overline{B_I}$ und $L^* \subseteq \overline{B_L}$. Sei B_L so gewählt, dass $|B_I \cap B_L|$ maximal.

1. Fall: $I^* \not\subseteq L^* \cup B_L$: Dann können wir $x \in I^* - (L^* \cup B_L)$ wählen. Es gilt $L^* + x \subseteq \overline{B_L}$.

2. Fall: $I^* \subseteq L^* \cup B_L$: Wir zeigen, dass dieser Fall nicht auftreten kann, indem wir nochmal zwei Fallunterscheidungen machen.

Fall 2a: Sei $B_I \subseteq L^* \cup B_L$. Dann ist $I^* \cup B_I \subseteq L^* \cup B_L$. Dies geht aufgrund der Kardinalitäten nicht: $|I^*| = k$, $|B_I| = r$ und $|B_L| = r$. Also wäre $k + r \leq k - 1 + r$. Widerspruch!

Fall 2b: Sei $B_I \not\subseteq L^* \cup B_L$. Wähle $x \in B_I - (L^* \cup B_L)$. Es gilt: $B_L + x$ ist abhängig. $B_L + x$ enthält eine eindeutige minimal abhängige Menge, einen eindeutigen Kreis C . Wähle $y \in C \setminus B_I$. Dann folgt, $B_L + x - y$ ist eine Basis und diese Basis hat mehr Elemente mit B_I gemeinsam als B_L . Widerspruch zur Wahl von B_L . \square

Definition 10.14. Sei $M = (S, J)$ ein Matroid. Das Matroid $M^* = (S, J^*)$ mit $J^* := \{I^* \subseteq S : \exists \text{ Basis } B \text{ von } M \text{ mit } I^* \subseteq S \setminus B\}$ heißt *duales Matroid*.

Note 10.15. Es gilt $(M^*)^* = M$.

10.5.1. *Lineare Matroide und ihre Duale.* Wir betrachten endliche lineare Matroide. Ein Matroid $M = (S, J)$ ist \mathbb{F} -linear wenn m Vektoren $(v_s)_{s \in S}$, $v_s \in \mathbb{F}^m$ existieren, so dass $I \in J$ genau dann, wenn $(v_s)_{s \in I}$ linear unabhängig.

Lemma 10.16. *Sei M \mathbb{F} -linear und $\text{rang}(M) = r$, dann kann $m = r$ gewählt werden. ($\text{rang}(M)$ ist definiert als maximale Kardinalität einer unabhängigen Menge)*

Beweis. " \Rightarrow " Sei $(v_s)_{s \in S}$ eine Darstellung in \mathbb{F}^m , $m > r$. Wir stellen die Vektoren als Spalten in einer $m \times n$ - Matrix A dar, $n = |S|$. Die Matrix A ist Abbildung von $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$. Für die Dimension vom Bild gilt:

$$\dim \text{Im}(A) = \text{rang}(A) = \text{rang}(M) = r.$$

Sei B eine $r \times m$ -Matrix, die $\mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^r$ abbildet, so dass $B|_{\text{Im}(A)} : \text{Im}(A) \rightarrow \mathbb{F}^r$ ein Isomorphismus ist.

Behauptung: Die Matrix $A' = B \cdot A$ ist eine Darstellung von M . A' ist eine $r \times n$ Matrix.

Beweis: Sei $D \subseteq S$ abhängig in M . Dann gibt es einen Vektor x mit $Ax = 0$ und $\text{Träger}(x) \subseteq D$. Mit $\text{Träger}(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} | x_i \neq 0\}$.

Deswegen ist $A'x = B(Ax) = 0$. Also beschreibt D eine abhängige Spaltenmenge von A' .

" \Leftarrow " Wenn $A'x = 0$, dann muss schon $Ax = 0$ gewesen sein, weil B ein Isomorphismus ist. Also haben A und A' die gleichen abhängigen Spaltenmengen. Damit haben sie auch die gleichen unabhängigen Spaltenmengen, also haben wir eine Darstellung von M wie gewünscht. \square

Theorem 10.17. Wenn M \mathbb{F} -linear ist, dann ist auch M^* \mathbb{F} -linear.

Beweis. Sei $\text{rang}(M) = r$ und M sei dargestellt durch eine $n \times r$ Matrix A , die wir wieder als lineare Abbildung von $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^r$ auffassen wollen.

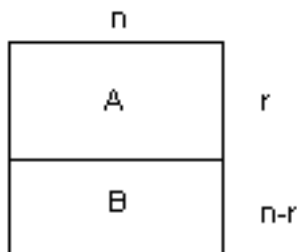


ABBILDUNG 73. Folgende Situation der Matrix A liegt vor

Ergänze die linear unabhängigen Zeilen von A zu einer Basis von \mathbb{F}^n mit Vektoren aus $\ker A$, und stelle diese zusätzlichen Vektoren als Zeilen in eine Matrix B . B ist eine $n \times (n - r)$ - Matrix. Es gilt:

$$\begin{aligned} Ax = 0 &\Leftrightarrow x \in \ker A \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{F}^{n-r}, x = B^T y. \end{aligned}$$

Behauptung: B ist eine Darstellung von M^* .

Wir zeigen: $I \in \binom{S}{r}$ ist linear abhängige Spaltenmenge in $A \Leftrightarrow S \setminus I$ ist linear abhängig in B .

Umordnen der Spalten erlaubt uns anzunehmen, dass $I = \{1, \dots, r\}$. Wenn I eine abhängige Menge ist, dann existiert ein x mit $Ax = 0$ und $\text{Träger}(x) \subseteq I$. Also existiert ein $y \in \mathbb{F}^{n-r}$ mit $x = B^T y$. Zerlege $x = (x_1 | x_2)$ und $B = (B_1 | B_2)$ in jeweils $r + (n - r)$ Koordinaten. Also existiert ein y mit $x_1 = B_1^T y$ und $x_2 = 0 = B_2^T y$. Aus dem zweiten Teil folgt, dass die Spalten von B_2 linear abhängig sind, und dies sind die $S \setminus I$ Spalten von B . \square

Proposition 10.18. Nicht alle Matroide sind linear.

Beweis. Betrachte ein Matroid M vom Rang 3, dessen abhängige 3-Mengen durch die nichtgrünen Geraden der Pappus Konfiguration gegeben sind: Es sind auf zwei Geraden jeweils drei Punkte (A, B, C) und (a, b, c) gegeben. Diese Punkte verbindet man durch 6 Geraden (A mit c und b , B mit a und c und C mit a und b). Eine weitere Gerade läuft nun durch die Schnittpunkte α, β, γ . Diese Konstruktion bildet einen

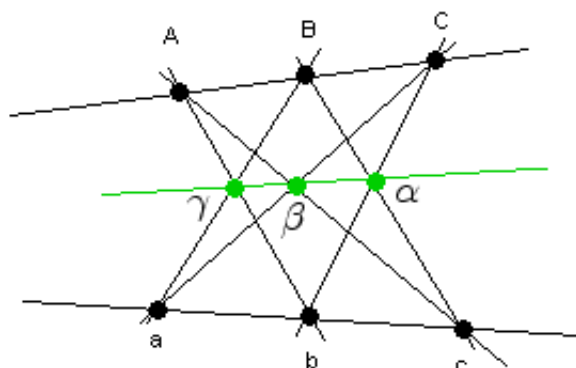


ABBILDUNG 74. Eine Pappuskonfiguration

Matroid, wobei alle 1- und 2-elementigen Mengen sowie die 3-elementigen Mengen bis auf die 8 nichtgrünen Geraden der Zeichung unabhängige Mengen sind. Wir müssen zeigen, dass alle Axiome erfüllt sind. Betrachte insbesondere I_2 . $I, L \in J$ mit $|I| = |L| - 1 \Rightarrow \exists x \in L \setminus I$ so dass $I + x$ unabhängig.

Wenn M \mathbb{F} -linear ist, dann existiert eine Darstellung in \mathbb{F}^3 . Wir dürfen annehmen, dass $A = (1, 0, 0)^T$ und $a = (0, 1, 0)^T$ und $\alpha = (0, 0, 1)^T$ ist. Für lineare Abhängigkeit benutzen wir das Determinantenkriterium: wenn die Determinante gleich Null ist, sind drei Punkte linear abhängig.

Die Geraden liefern Gleichungen in den Koeffizienten der Punkte

$$B_2 C_3 = B_3 C_2.$$

Dies erhalten wir durch: $\det(A, B, C) \stackrel{!}{=} 0$ und $\det(1, 0, 0; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3) \stackrel{!}{=} 0$.

Außerdem gilt

$$\beta_2 c_3 = \beta_3 c_2$$

und

$$\gamma_3 b_2 = \gamma_2 b_3$$

Ebenso erhalten wir

$$\gamma_1 B_3 = \gamma_3 B_1$$

$$\beta_3 C_1 = \beta_1 C_3$$

$$b_3 c_1 = b_1 c_3$$

und Punkt α gibt uns

$$B_1 c_2 = B_2 c_1$$

$$b_1 C_2 = b_2 C_1.$$

Bilde Produkte aller linken Seiten und aller rechten Seiten. Nach dem Kürzen bleibt dann nur noch:

$$\gamma_1 \beta_2 = \beta_1 \gamma_1.$$

Das ist genau die Bedingung, dass $\det(\alpha\beta\gamma) = 0$.

□

Theorem 10.19. *Alle graphischen Matroide sind linear über jedem Körper \mathbb{F} .*

Beweis. Ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ beschreibe eine Darstellung in \mathbb{F}^n . Seien v_1, \dots, v_n linear unabhängige Vektoren in \mathbb{F}^n . (Wir identifizieren Knoten $v_i \leftrightarrow$ Vektor v_i). Sei \vec{E} eine Orientierung von E mit $e = (v_i, v_j) \in \vec{E}$. Assoziiere den Vektor $w_e = v_i - v_j$.

Behauptung: $(w_e)_{e \in \vec{E}}$ ist Darstellung von M_G .

1. Richtung: Sei $A \subseteq \vec{E}$, so dass es Koeffizienten $a_e \neq 0$ für $e \in A$ gibt mit $\sum_{e \in A} a_e w_e = 0$. Daraus sieht man, dass der Graph (V, A) keinen Knoten vom Grad 1 hat. (Denn sonst bekämen wir $v_i = \sum_{j \neq i} c_j v_j$, Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der v_i). Also ist (V, A) entweder leer oder enthält einen Kreis, da Grad dann mindestens 2. Also ist A abhängig in M_G .

Die andere Richtung: Wenn (V, A) einen Kreis C enthält, dann ist $\sum_{e \in C} \delta_e w_e = 0$ für $\delta_e \in \{+1, -1\}$ (vgl. Übung 41). Also ist A abhängig im linearen Matroid $\{w_e\}$. \square

10.6. Minoren. Sei $M = (S, J)$ ein Matroid und $e \in S$. Wir betrachten folgende zwei Operationen:

1. Löschen: $M \setminus e = (S \setminus e, J \setminus e)$, wobei $J \setminus e = \{I \in J : e \notin I\}$

2. Kontrahieren: $M/e = (S \setminus e, J/e)$ mit $J/e = \{I \in J : e \notin I \text{ und } I + e \in J\}$ Minoren entstehen durch eine Folge von Lösch- und Kontraktionsoperationen. Minoren sind selbst Matroide. Minoren können häufig benutzt werden, um Klassen von Matroiden zu charakterisieren.

Theorem 10.20. *Das Matroid M ist \mathbb{F}_2 linear $\Leftrightarrow M$ enthält keinen $U_{2,4}$ Minor. Der $U_{2,4}$ ist Uniform vom Rang 2 auf 4 Elementen. ($|S| = 4$ und die Menge der Basen $B = \binom{S}{2}$.)*

10.7. Schnitt-Matroide. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Zusammenhangskomponenten V_1, \dots, V_k . Die Menge $M^* = (E, J^*)$ sei definiert durch $I \in J^*$, genau dann wenn $(V, E \setminus I)$ die gleichen Zusammenhangskomponenten wie G hat.

Definition 10.21. Die Menge $M^* = M^*(G)$ heißt *Schnitt-Matroid* von G .

Note 10.22. Die minimal abhängigen Mengen (Kreise von M^*) von M^* sind minimal trennende Kantenmengen (Schnitte von G). Das Matroid $M(G)$, dessen unabhängigen Mengen die Wälder sind, heißt auch *Kreis-Matroid*.

Proposition 10.23. *Das Schnitt-Matroid von G ist das Duale des Kreis-Matroids:*

$$M^*(G) = M(G)^*.$$

Beweis. $I \in J^* \Leftrightarrow I$ nicht trennend $\Leftrightarrow E \setminus I$ enthält einen maximal aufspannenden Wald von $G \Leftrightarrow E \setminus I$ enthält Basis B von $M(G) \Leftrightarrow I \subseteq \bar{B}$ für eine Basis B von $M(G) \Leftrightarrow I \in J^*$ \square

Proposition 10.24. *Die Menge $M^*(G)$ ist tatsächlich ein Matroid.*

11. PLANARE GRAPHEN

11.1. Definitionen und Jordanscher Kurvensatz.

Definition 11.1. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, wenn es eine kreuzungsfreie Zeichnung von G in der euklidischen Ebene gibt.

Was bedeutet "Zeichnung" in \mathbb{R}^2 ?

Sei $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv. Für jedes $(u, v) \in E$ gibt es eine einfache (injektive) Kurve $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(0) = \varphi(u)$ und $\alpha(1) = \varphi(v)$. Für zwei Kanten e und e' gilt:

$$\alpha(e) \cap \alpha(e') = \varphi(e \cap e'),$$

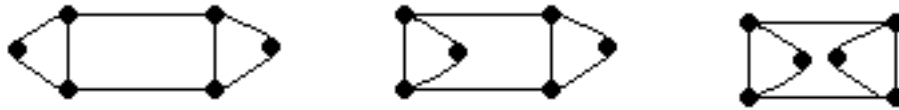


ABBILDUNG 75. Die dritte Zeichnung entspricht der ersten, wenn wir Innen und Außen vertauschen

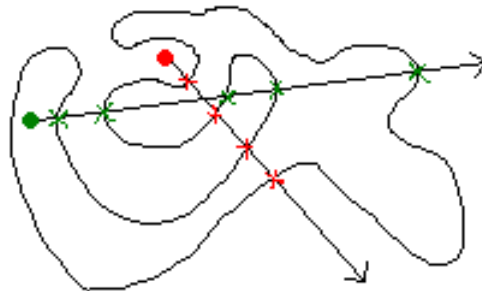


ABBILDUNG 76. Strahlschießen ergibt Innen oder Außen

wobei $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

Eine Zeichnung eines planaren Graphen hat Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{e \in E} \alpha(e)$. Dies sind die *Flächen* der Zeichnung.

Note 11.2. Die Flächen und die Anzahl der Grenzkanten hängen von der jeweiligen Zeichnung des Graphen ab:

Definition. Ein Graph G heißt *planar* (plättbar), wenn er eine kreuzungsfreie Einbettung hat. Ein Graph G heißt *plane* (geplättet), wenn er kreuzungsfrei eingebettet ist.

Theorem 11.3. [Jordanscher Kurvensatz] Eine einfach geschlossene Kurve im \mathbb{R}^2 teilt die Ebene in zwei Zusammenhangskomponenten (“innen” und “außen”). Ein Punkt liegt “innen”, wenn eine nichtdegenerierte Gerade (d.h. nur Schnitt-, keine Berührungspunkte) von diesem Punkt ins Unendliche eine ungerade Anzahl von Schnitten mit der Kurve hat; er liegt “außen”, wenn die Anzahl gerade ist.

Proposition 11.4. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Beweis. Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gibt eine kreuzungsfreie Zeichnung. Sei C ein aufspannender Kreis. Für e, e' aus $E \setminus C$ sagen wir: e und e' sind im *Konflikt*, wenn die Endpunkte entlang C alternieren.

Diese beiden Graphen sind nicht bipartit, also enthält jede Verteilung der Kanten aus $E \setminus C$ bezüglich C auf “innen” und “außen” ein Konfliktpaar. \Rightarrow Kreuzung. Widerspruch! \square

Theorem 11.5. Satz von Kuratowski

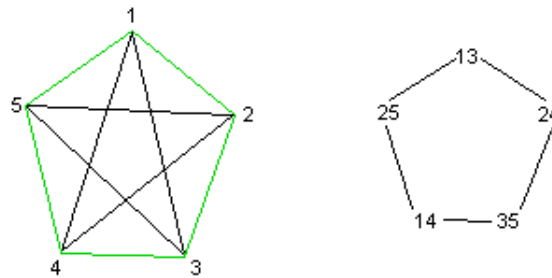


ABBILDUNG 77. K_5 und sein Konfliktgraph

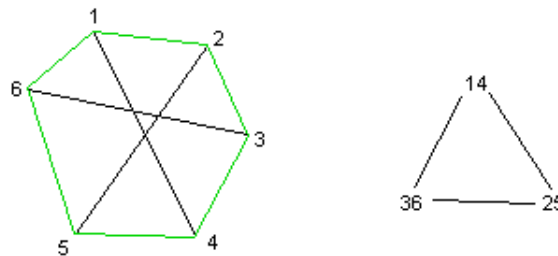


ABBILDUNG 78. $K_{3,3}$ und sein Konfliktgraph

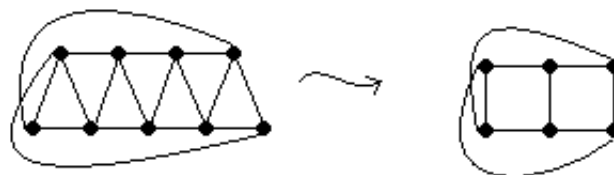


ABBILDUNG 79. Ein Graph und $K_{3,3}$ -Unterteilung

G planar $\Leftrightarrow G$ enthält keine Unterteilung von K_5 und $K_{3,3}$ als Subgraph.

Beweis kommt später.

Example 11.6.

11.2. **Duale Graphen.** Sei G planar gezeichnet. Den dualen Graphen G^* enthält man durch folgende Konstruktion:

- setze in jede Fläche von G einen dualen Knoten
- für jede Kante $\{x, y\}$ von G füge eine duale Kante ein, die die dualen Knoten in den beiden von $\{x, y\}$ getrennten Flächen verbindet.

Dies kann so durchgeführt werden, dass G^* kreuzungsfrei gezeichnet ist.

Beobachtung:



ABBILDUNG 80. Graph und sein Dual mit Schleifen und Mehrfachkanten

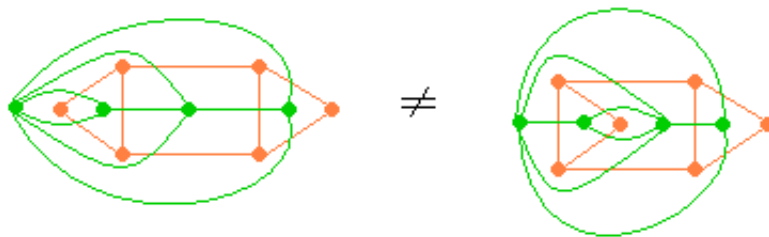


ABBILDUNG 81. Links haben wir einen grünen Knoten vom Grad 6, rechts nicht

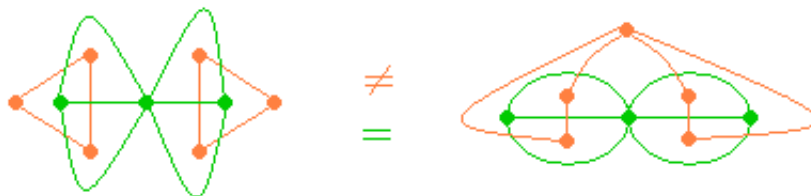


ABBILDUNG 82. Das Dual vom Dual ist zusammenhängend, obwohl der ursprüngliche Graph es nicht war

- Brücke von $G \leftrightarrow$ Schleife von G^*
- Flächen mit gemeinsamen Kanten \leftrightarrow Mehrfachkanten

Aber: verschiedene Zeichnungen können verschiedene Duale haben:
 Wenn G nicht zusammenhängend ist, muss *nicht* gelten $(G^*)^* = G$.

11.3. Schnitte und Kreise in G und G^* .

Theorem 11.7. Sei $G = (V, E)$ planar gezeichnet.

$S \subseteq E$ enthält einen Kreis

\Leftrightarrow

S^* , die duale Kantenmenge ist trennend in G^*

Beweis. " \Rightarrow " S enthält einen Kreis C , der "Innen" und "Außen" hat. In beiden Teilen hat G^* Knoten. Seien diese v^*, w^* .

\Rightarrow jede $v^* - w^*$ -Kurve schneidet C

\Rightarrow jeder duale Weg von v^* nach w^* schneidet S , d.h. der Weg enthält eine duale Kante in S^*

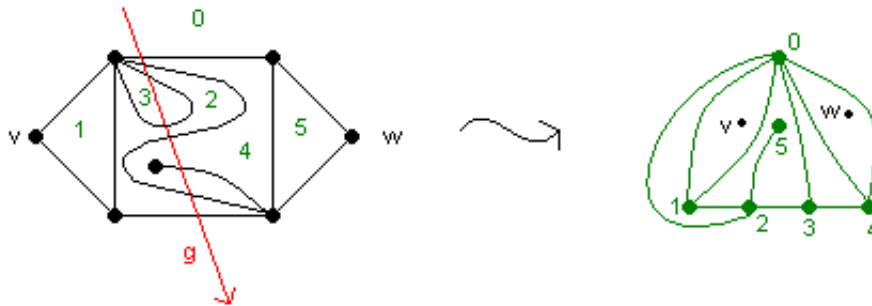


ABBILDUNG 83. Trennende Gerade g definiert trennenden Kreis

$\Rightarrow S^*$ trennt v^* und w^* . S^* ist trennend!

“ \Leftarrow ” S kreisfrei $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{e \in S} \alpha(e)$ ist zusammenhängend. $\Rightarrow E^* \setminus S^*$ ist zusammenhängend, also ist S^* nicht trennend. \square

Corollary 11.8. *Kreismatroid von $G =$ Schnittmatroid von G^* .*

$$M(G) = M^*(G^*)$$

Ziel ist folgender Satz, der weiter unten bewiesen wird.

Theorem 11.9. *Satz von Whitney*

G planar \Leftrightarrow Schnittmatroid von G ist Kreismatroid.

Proposition 11.10. *Seien $v \neq w$ zwei Knoten eines planaren Graphen G , die in derselben Zusammenhangskomponente liegen. Dann liegen v und w in verschiedenen Flächen des Dualgraphen G^* .*

Beweis. Betrachte eine Gerade g , die v und w in der Zeichnung trennt. g schneidet Kanten aus E . Sei e_1, \dots, e_r die Folge dieser Kanten. $\Rightarrow e_1^*, \dots, e_r^*$ enthalten einen Kreis, der v und w trennt. \square

Example 11.11. Betrachte den folgenden Graphen und eine Gerade g , die v und w trennt:

Die Gerade g entspricht im Dual dem Kantenzug 042324420. Trennender Kreis für v, w in G^* ist 0420.

Theorem 11.12. *Sei G planar und zusammenhängend mit $n \geq 2$. Dann folgt $(G^*)^* = G$.*

Beweis. Sei G zusammenhängend. Daraus folgt, dass in jeder Fläche von G^* genau ein Knoten liegt. $\Rightarrow G$ ist dualer Graph von G^* . (Konstruktion des Duals!) \square

Conclusion 11.13. Für einem planaren zusammenhängenden Graphen G gibt es eine Bijektion zwischen

$$\begin{aligned} V &\leftrightarrow F^* \\ F &\leftrightarrow V^* \\ E &\leftrightarrow E^* \end{aligned}$$

11.4. Minoren von Graphen. Sei G ein Graph (nicht notwendig planar) und e eine Kante in G . Wir betrachten die beiden folgenden Operationen:

(1) Löschen von e aus G :

$$G \setminus e = (V, E \setminus e)$$



ABBILDUNG 84. Löschen einer Kante

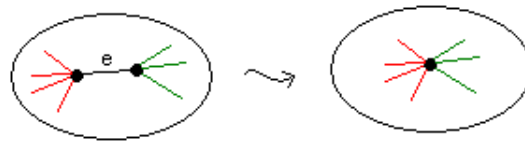


ABBILDUNG 85. Kontrahieren einer Kante

(2) Kontrahieren von e in G :

$$G/e = (V/e, E/e)$$

Hierbei können Mehrfachkanten entstehen, die wir dann löschen.

Definition 11.14. Ein Minor von G ist ein Graph, der durch eine Folge von Löschungen und Kontraktionen aus G entsteht.

Proposition 11.15. *Jeder Minor eines planaren Graphen ist planar.*

Beweis. Wir können bei der Kontraktion einen Schlauch um die Kante e legen. Beim Zeichnen lassen wir also die einen Kanten bis zum ursprünglichen Knoten laufen und zeichnen sie dann mit einem Knick, so dass sie alle parallel in diesem Schlauch verlaufen zu dem neuen Knoten a^* . □

11.5. **Sätze von Wagner und Robertson&Seymour.**

Theorem 11.16 (Wagner). G planar $\Leftrightarrow G$ enthält keinen K_5 - oder $K_{3,3}$ -Minor.

Beweis. " \Rightarrow " Wir wissen, dass jeder Minor eines planaren Graphen planar ist. Der K_5 und der $K_{3,3}$ sind nicht planar, also können sie keine Minoren eines planaren Graphen sein.

" \Leftarrow ": Folgt aus dem Satz von Kuratowski: Subgraphen sind Minoren und Unterteilung von H hat H als Minor. □

Note 11.17 (Robertson und Seymour). Sei \mathcal{G} eine Familie von Graphen, die unter Minoren abgeschlossen ist, d.h. wenn $G \in \mathcal{G}$ und H Minor von G ist, dann folgt $H \in \mathcal{G}$. Dann ist \mathcal{G} durch eine endliche Menge K_1, \dots, K_r von verbotenen Minoren charakterisiert, d.h. $G \in \mathcal{G}$, genau dann, wenn kein K_i Minor von G ist.

11.6. **Charakterisierung planarer Graphen über Matroide.** Für G planar gilt

$$(G \setminus e)^* = G^* / e,$$

und umgekehrt gilt

$$(G/e)^* = G^* \setminus e.$$

Für Matroide M gilt ebenfalls

$$(M \setminus e)^* = M^* / e$$

und

$$(M/e)^* = M^* \setminus e.$$

Ausserdem gilt für das Kreismatroid

$$M(G \setminus e) = M(G) \setminus e$$

sowie

$$M(G/e) = M(G)/e.$$

Corollary. *Daraus folgt für das Schnittmatroid*

$$M^*(G \setminus e) = M^*(G) \setminus e$$

und

$$M^*(G/e) = M^*(G)/e$$

Beweis. $M^*(G \setminus e) = [M(G \setminus e)]^* = [M(G) \setminus e]^* = [M(G)]^* \setminus e = M^*(G) \setminus e$. Analog beweist man die zweite Aussage. \square

Nun können wir den oben bereits erwähnten Satz von Whitney beweisen.

Theorem 11.18 (Whitney). *Der Graph G ist genau dann planar, wenn das Schnittmatroid von G ein Kreismatroid ist.*

Beweis. " \Rightarrow " : Wir dürfen annehmen, dass G zusammenhängend ist. (Hätten wir verschiedene Komponenten, könnten wir zwei Randknoten verkleben. Dies ändert das Schnittmatroid nicht.)

Allgemein gilt für G planar: $M(G) = M^*(G^*)$. Da G zusammenhängend ist, folgt

$$M(G^*) = M^*((G^*)^*) = M^*(G).$$

Also ist das Schnittmatroid von G gerade das Kreismatroid von G^* .

" \Leftarrow " Wir sagen H ist ein abstraktes Dual von G , wenn

$$M^*(G) = M(H).$$

Claim. Wenn G ein abstraktes Dual besitzt, dann auch $G \setminus e$ und G/e für jedes e .

Beweis der Behauptung: Betrachte

$$M^*(G \setminus e) = M^*(G) \setminus e = M(H) \setminus e = M(H \setminus e).$$

ebenso

$$M^*(G/e) = M^*(G)/e = M(H)/e = M(H/e).$$

Wir benutzen Kuratowski/Wagner: Wenn G nicht planar ist, dann hat G einen K_5 oder einen $K_{3,3}$ Minor.

Claim. Die Schnittmatroide von K_5 und $K_{3,3}$ sind keine Kreismatroide. Beziehungsweise: K_5 und $K_{3,3}$ besitzen kein abstraktes Dual.

Vorüberlegung: $M^*(G) = M(H) \Rightarrow [M(G)]^* = M(H) \Rightarrow M(G) = [M(H)]^* \Rightarrow M(G) = M^*(H)$ In Worten: wenn H ein abstraktes Duale von G ist, dann ist G ein abstraktes Dual von H .

• $K_{3,3}$: Jeder Kreis im $K_{3,3}$ hat die Länge 4 oder 6. $\Rightarrow \delta_H \geq 4$, da für alle $v \in H$, (v, \bar{v}) ein Schnitt ist. $\Rightarrow 4n_H \leq \sum_{v \in V} d_H(v) = 2|E| = 2 \cdot 9 = 18$, d.h. $n_H \leq \lfloor \frac{18}{4} \rfloor = 4$. H muss einfach sein, weil es keinen 2- Schnitt im $K_{3,3}$ gibt. Dies ist ein Widerspruch, weil es keinen einfachen Graphen auf ≤ 4 Knoten mit 9 Kanten, bzw. mit Minimalgrad ≥ 4 gibt.

• K_5 : Jeder Kreis in K_5 hat ≥ 3 Kanten. Also ist $\delta_H \geq 3$. Daraus folgt $3n_H \leq \sum_{v \in V} d_H(v) = 2|E| = 20$. Also ist $n_H \leq \lfloor \frac{20}{3} \rfloor = 6$. Alle Schnitte vom K_5 haben 4 oder 6 Kanten. Das heißt, H ist bipartit und einfach. Widerspruch, denn einfach und bipartit auf ≤ 6 Knoten, impliziert ≤ 9 Kanten. Wir bräuchten aber 10 Kanten. \square

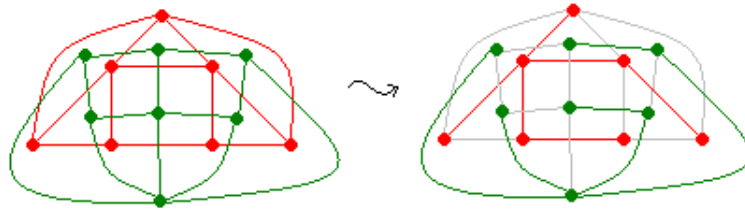


ABBILDUNG 86. Aufspannende Bäume, die sich nicht schneiden

11.7. Die Euler-Formel.

Theorem 11.19. Sei der Graph $G = (V, E)$ planar. Dann gilt

$$|V| - |E| + |F| = 1 + K,$$

wobei K die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G angibt. Für G zusammenhängend gilt also

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Beweis. Es gibt sehr viele Beweise zu diesem Satz. In David Eppsteins "Geometry Junkyard" sind 17 Beweise aufgeführt. Hier sind einige davon:

1. Beweis: Duale Basen (für zusammenhängende Graphen)

Betrachte einen planaren Graphen G . Zu diesem planaren Graphen betrachten wir den Dualgraphen G^* . Sei T_1 eine Basis im planaren Graphen, also ein aufspannender Baum. Dann wurden einige Kanten im dualen Graphen durch die Kanten von T_1 gestrichen. Betrachten wir die nicht gestrichenen Kanten. Damit erhält man eine Basis des dualen Graphen, den Baum T_2 . Der Baum T_1 hat

$$|E_{T_1}| = |V| - 1$$

Kanten. Entsprechend hat T_2

$$|E_{T_2}| = |V^*| - 1 = |F| - 1$$

Kanten. Wir erhalten also

$$|E| = |E_{T_1}| + |E_{T_2}| = |V| + |F| + 2.$$

2. Beweis: Noahs Arche

Nach der großen Flut haben wir zunächst n Knoten (Inseln), 0 Kanten und 1 Fläche (Meer) sowie $k = n$ Komponenten. Es gilt also $n - 0 + 1 = 1 + n$. Wenn das Wasser nun wieder langsam sinkt, entstehen immer wieder Landbrücken zwischen zwei Inseln: eine Kante kommt hinzu:

Fall 1: Sie verbindet Komponenten: $m \rightarrow m + 1$ und $k \rightarrow k - 1$. Die Gleichung bleibt erhalten.

Fall 2: Sie verbindet innerhalb einer Komponente $m \rightarrow m + 1$ und $f \rightarrow f + 1$. Auch dies ändert nichts an der Gleichung.

3. Beweis: Verrechnen von Ladungen

Wir nehmen an, dass G x -monoton gezeichnet ist, d.h. jede Kante und jede Fläche wird von jeder vertikalen Gerade in einem zusammenhängenden Stück geschnitten. Wir verteilen Ladungen auf dem Graphen: "+" für jeden Knoten und jede Fläche und "-" für jede Kante.

Jede Kante und jede beschränkte Fläche legt ihre Ladung zum rechtesten Knoten. Die Ladungen an den Knoten gleichen sich aus.

ABBILDUNG 87. Ein Knoten hat folgende Form: Kanten, die in den Knoten reingehen und welche, die weggehen. Der Knoten selber hat ein Plus und zwischen je zwei Kanten ist der Knoten der rechte Seite einer Fläche. Genauso haben die Kanten negative Ladung und es ergibt sich ein plus-minus-plus-minus..., also in der Summe 0.

Dies gilt für alle Knoten bis auf die Knoten ganz links und die äußere Fläche. Also haben wir einen Überschuss von zwei.

Schwierig bei dem Beweis ist, dass er x -monoton gezeichnet voraussetzt...

4. Beweis: Winkelsummen

Sei G mit gradlinigen Kanten gezeichnet (keine o.B.d.A. Voraussetzung).

Lemma 11.20. *Eine Fläche, die von K Kanten berandet wird, hat (innere) Winkelsumme $(K - 2)\pi$.*

Beweis. Betrachte ein solches K -gon. Ein K -gon kann in Dreiecke zerlegt werden, deren Ecken alle Ecken des K -gons sind. Die Anzahl der Dreiecke in jeder solchen Zerlegung ist $K - 2$. [Beweisidee (für Existenz der Zerlegung und die Anzahl der Dreiecke): Induktion: Finde eine Sehne. Schneide die Fläche in zwei Teile. Auf der einen Seite haben wir S und auf der anderen T Kanten. In beiden Teilen wird die Sehne mitgezählt. Also gilt $S + T = K + 2$. In S haben wir eine Zerlegung von $S - 2$ und in T eine von $T - 2$ Dreiecken, also zusammen $K - 2$. Das Entscheidende ist also: wie finde ich eine Sehne? Wenn das K -gon streng konvex ist, dann ist jede Verbindung eine brauchbare Sehne. Schwierig ist es, wenn wir konkave Ecken haben. Diese machen gewisse Sehnen "kaputt". Man muss also von einem Spitz ausgehen und eine Verbindung zu einer anderen Ecke finden, die man sehen kann.]

Die Winkelsumme erhalte ich als Summe der Einzelwinkel der Dreiecke. Die Summe der Winkel in einem Dreieck ist π . Da das K -gon in $K - 2$ Dreiecke zerteilt werden kann, erhalten wir einen Innenwinkel von $(K - 2)\pi$ □

Die äussere Fläche (mit K Randkanten) hat eine Winkelsumme von

$$\underbrace{2\pi K}_{\text{Vollkreis je Ecke}} - \underbrace{(K - 2)\pi}_{\text{Summe der Innenwinkel}} = (K - 2)\pi + 4\pi.$$

Jede Kante trägt zur Randlänge von zwei Flächen bei. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_F \text{Winkelsumme}(F) &= \left(\sum_F (l(F) - 2)\pi \right) + 4\pi \\ &= (2|E| - 2|F|)\pi + 4\pi \end{aligned}$$

wobei $l(F)$ die Länge der Fläche bezeichnet. Andererseits bekommen wir die Gesamtwinkelsumme auch durch die Beiträge der Knoten $2\pi|V|$. Zusammen erhalten wir

$$(2|E| - 2|F|)\pi + 4\pi = 2\pi|V|$$

und damit

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

□

Conclusion 11.21. Aus der Euler-Formel folgt:

- K_5 nicht planar: $|V| = 5$, $|E| = 10$. Dann folgt mit Euler $|F| = 7$. Jede Fläche hat Randlänge ≥ 3 . Also gilt

$$\underbrace{\sum_F l(F)}_{=2|E|=20} \geq 21$$

Widerspruch.

- $K_{3,3}$ ist nicht planar: $|V| = 6$, $|E| = 9$. Dann folgt mit Euler $|F| = 5$. Der $K_{3,3}$ ist bipartit. Daraus folgt, er enthält keine ungeraden Kreise. Die Ränder von Flächen sind Kreise, also muss jede Fläche mindestens die Randlänge 4 haben.

$$\underbrace{\sum_F l(F)}_{=2|E|=18} \geq 20.$$

Widerspruch.

Proposition 11.22. *Sei der Graph G planar, zusammenhängend, sowie $n \geq 3$. Dann gilt:*

- (1) G hat höchstens $3n - 6$ Kanten
- (2) G hat höchstens $2n - 4$ Flächen
- (3) G hat einen Knoten vom Grad ≤ 5 .

Beweis. Betrachte die Summe über die Flächenlängen:

$$3|F| \leq \sum_F l(F) = 2|E| \quad (\star)$$

zu (1): Nach Euler gilt: $|V| - 2 = |E| - |F|$. Multipliziert mit 3 erhalten wir

$$\begin{aligned} 3|V| - 6 &= 3|E| - 3|F| \\ &\stackrel{(\star)}{\geq} (|E| + 3|F|) - 3|F| \\ &= |E| \end{aligned}$$

zu (2): Wir multiplizieren die Euler Formel mit 2 und erhalten dann

$$\begin{aligned} 2|V| - 4 &= 2|E| - 2|F| \\ &\stackrel{(\star)}{\geq} 3|F| - 2|F| \\ &= |F| \end{aligned}$$

zu (3): Wir wissen

$$\sum_{v \in V} d_v = 2|E| \leq 6|V| - 12.$$

Also können nicht alle Knoten vom Grad 6 oder größer sein. □

Conclusion. Gleichheit in Teilen (1) und (2) der Proposition gilt genau, wenn jede Fläche von G ein Dreieck ist.

11.8. Satz von Kuratowski.

Theorem 11.23. *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von $K_{3,3}$ oder K_5 hat. ("K-Unterteilung")*

Lemma 11.24. *Für ein minimales Gegenbeispiel H müsste gelten:*

- (1) H ist zusammenhängend
- (2) H ist 2-zusammenhängend
- (3) H ist 3-zusammenhängend

Beweis. Zu (1): H ist ein Gegebenbeispiel, d.h. H ist nicht planar und hat keinen Kuratowski-Untergraphen (keinen $K_{3,3}$ oder K_5). Angenommen, H ist nicht zusammenhängend, d.h. $H = H_1 \dot{\cup} H_2$. Die H_i haben keinen Kuratowski-Untergraphen und sind kleiner als H . Also sind sie planar. Damit muss aber auch H planar sein. Widerspruch zu " H ist ein Gegenbeispiel".

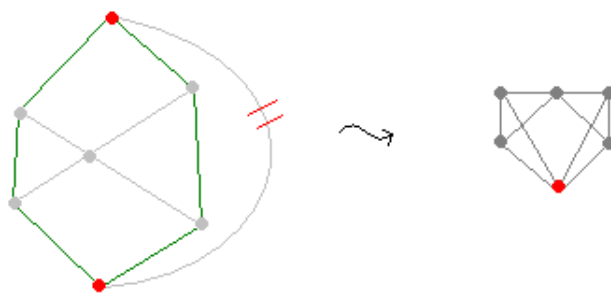


ABBILDUNG 88. Die grünen Kante können kontrahiert werden, die anderen machen ihn 2-zusammenhängend

Zu (2): H ist nicht 2-zusammenhängend. Dann gibt es einen Separator v der Größe 1. Die so entstehenden Komponenten H_i müssen planar sein.

Dann muss es eine Zeichnung für jedes H_i geben, so dass v außen liegt. Damit ist aber H planar, weil die H_i zyklisch um v angelegt werden können und somit H bilden. Widerspruch.

Zu (3): Angenommen H ist nicht 3-zusammenhängend. Dann gibt es zwei Knoten x und y , so dass der Graph in mehrere Komponenten zerfällt, wenn man diese Knoten entfernt.

Betrachte H_i mit x, y und der Kante $\{x, y\}$, auch wenn die Kante eigentlich nicht in dem Graphen ist. Den so entstehenden Graphen nennen wir \tilde{H}_i . Behauptung: diese \tilde{H}_i enthalten keine Kuratowski-Untergraphen. Wenn \tilde{H}_i einen K -Untergraphen enthält, dann enthält auch H einen. (Ersetze die Kante $\{x, y\}$ durch einen $x - y$ Weg in einer Komponente H_j mit $j \neq i$.) Die \tilde{H}_i sind kleiner als H , also ist \tilde{H}_i planar. Es gibt eine Zeichnung mit $\{x, y\}$ aussen. Wir können also die Zeichnungen \tilde{H}_i an der Kante $\{x, y\}$ zusammenkleben.

Damit bilden sie eine planare Zeichnung von H . (Eventuell muss die Kante $\{x, y\}$ noch aus der Zeichnung gelöscht werden.) \square

Wir müssen also nur 3-fach zusammenhängende Graphen betrachten, wenn wir ein Gegenbeispiel finden wollen.

Lemma 11.25 (Thomassen). *Sei G 3-zusammenhängend und $n \geq 5$. Dann gibt es eine Kante e , so dass G/e 3-zusammenhängend ist.*

Example 11.26.

Beweis. Wenn $e = \{x, y\}$ die gewünschte Eigenschaft nicht hat, dann gibt es in G/e eine trennende 2-Menge. Diese besteht aus dem Kontraktionsknoten v_e und einem weiteren Knoten z .

In G ist die Menge $\{x, y, z\}$ trennend und jeder der drei Knoten hat einen Nachbarn in jeder Komponente.

Angenommen G enthält keine geeignete Kante. Wähle $e = \{x, y\}$ so, dass eine der Komponenten von $G \setminus \{x, y, z\}$ maximale Knotenzahl hat. Sei diese Komponente H . Sei u ein Nachbar von z in einer Komponente $\neq H$. Die Kante $\{z, u\}$ ist nicht geeignet (wegen Annahme), d.h. es existiert ein v , so dass $G \setminus \{z, u, v\}$ unzusammenhängend ist. Weil G 3-zusammenhängend ist, muss der auf $V_H \cup \{x, y\}$ induzierte Graph 2-zusammenhängend sein. (Sonst gäbe es 2-elementige trennende Menge für G .) Also liegt $(V_H \cup \{x, y\}) - \{v\}$ in einer Komponente von $G \setminus \{z, u, v\}$ und hat mehr Knoten als H . Widerspruch zu " H knotenmaximale Menge". \square

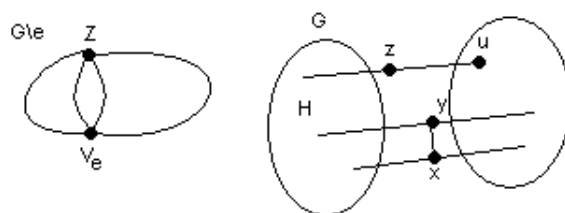


ABBILDUNG 89. Situation in G

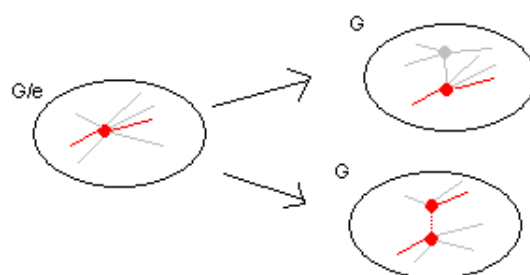


ABBILDUNG 90. So oder so kann G/e entstanden sein

Conclusion 11.27. Daraus folgern wir:

- Jeder 3-zusammenhängende Graph G erlaubt eine Kontraktionsfolge, die bei einem 3-zusammenhängenden Graphen mit $n = 4$ endet. Dies ist immer der K_4 .
- Jeder 3-zusammenhängende Graph hat K_4 als Minor.
- Jeder 3-zusammenhängende Graph entsteht aus K_4 durch eine Folge von Knotensplits.

Lemma 11.28. *Wenn G keine K -Unterteilung enthält, dann enthält auch G/e keine.*

Beweis. Wir zeigen: Wenn G/e eine K -Unterteilung enthält, muss auch G eine K -Unterteilung enthalten.

Sei H ein K -Unterteilung von G/e .

1. Fall: Wenn $v_e \notin H$, dann ist H eine K -Unterteilung von G .

2. Fall a): Sei $v_e \in H$ ein Unterteilungsknoten. Dann finden wir eine K -Unterteilung in G .

2. Fall b): Sei v_e ein Verzweigungsknoten. Falls x oder y nur für einen Nachbarn der K -Unterteilung "zuständig" sind, sind wir fertig, siehe oben.

Wenn sowohl x als auch y für mindestens zwei Nachbarn nötig sind, dann handelt es sich um eine Unterteilung des K_5 . ($K_{3,3}$ kann nicht sein, da dort jeder Knoten Grad 3 hat.)

□

Dieses Lemma gilt nur für die Kombination von K_5 und $K_{3,3}$. Man kann den Satz nicht auf "enthält K_5 " einschränken.

11.9. Konvexe Zeichnungen.

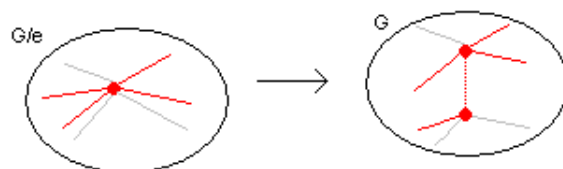


ABBILDUNG 91. So kann G/e entstanden sein

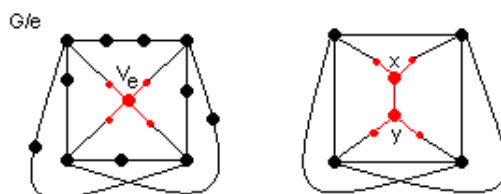


ABBILDUNG 92. Der rechte Graph enthält eine $K_{3,3}$ -Unterteilung

Theorem 11.29. Wenn G 3-zusammenhängend und ohne Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ ist, dann besitzt G eine streng konvexe Zeichnung.

Note 11.30. Eine streng konvexe Zeichnung ist planar, d.h. dieser Satz impliziert den Satz von Kuratowski. Damit ist aber schon der allgemeine Satz bewiesen, weil wir gezeigt haben, dass ein minimales Gegenbeispiel zu Kuratowski 3-zusammenhängend sein müsste.

Definition 11.31. Ein *konvexe Zeichnung* ist kreuzungsfrei und jede Fläche ist konvex. *Streng konvex* enthält zusätzlich die Eigenschaft, dass jede Fläche bei jedem Knoten einen Winkel kleiner als 180° hat.

Note 11.32. Zwei kurze Bemerkungen:

- (1) Konvexe Zeichnungen sind notwendig gradlinige Zeichnungen.
- (2) Jeder maximal planare Graph (d.h. jede weitere Kante macht den Graphen nicht-planar \rightarrow Triangulierung) ist 3-zusammenhängend.

Conclusion 11.33. Jeder planare Graph besitzt eine gradlinige Zeichnung.

Lemma 11.34. Wenn G nicht 3-zusammenhängend aber planar ist, ist G nicht maximal planar.

Beweis. Nun können wir den Satz über die Existenz streng konvexer Zeichnungen beweisen.

Induktion:

$n = 4, G = K_4$.

Sei G mit n Knoten gegeben. Dann gibt es eine Kante e , so dass G/e 3-zusammenhängend (erstes Lemma) und ohne K -Unterteilung ist (zweites Lemma). Induktionsannahme: G/e besitzt eine streng konvexe Zeichnung. Betrachte v_e in der Zeichnung. Sei C der Rand der Fläche, in der v_e liegt, in $G/e - v_e$.

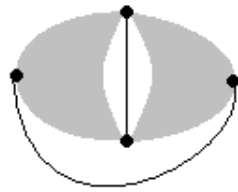


ABBILDUNG 93. 2-zusammenhängend würde noch eine Kante erlauben

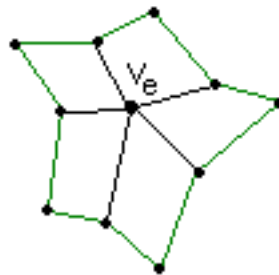


ABBILDUNG 94. Kreis um v_e

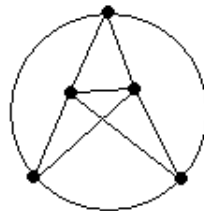


ABBILDUNG 95. K_5 -Unterteilung

Behauptung: C ist ein einfacher Kreis. (Dies gilt, da G/e 3-zusammenhängend.)
 Sei $e = \{x, y\}$. Alle Nachbarn von x und y liegen auf C . Sei x_1, \dots, x_k die zyklische Folge der Nachbarn von x .

1. Fall: Alle Nachbarn von y liegen in einem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$. In diesem Fall können wir v_e expandieren, so dass eine streng konvexe Zeichnung von G entsteht.

2. Fall a): Es gilt $|N(x) \cap N(y)| \geq 3$. Dann bekommen wir eine Unterteilung des K_5 .

Widerspruch.

2. Fall b): Wir finden zwei Nachbarn von x und zwei von y , die alternierend auf C liegen. Dann bekommen wir eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

Widerspruch.

Also kann nur Fall 1 eintreten. \Rightarrow Behauptung □

11.10. **Outerplanare Graphen.**

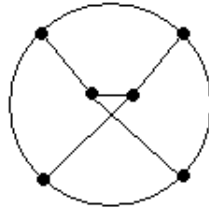


ABBILDUNG 96. $K_{3,3}$ -Unterteilung

Definition 11.35. Ein Graph G ist outerplanar genau dann, wenn G planar ist und es eine Zeichnung von G gibt, bei der alle Knoten an der äußeren Fläche liegen.

Example 11.36. Ein paar Beispiele:

- Bäume sind outerplanar.
- Kreise mit nicht kreuzenden Sehnen sind outerplanar.
- K_4 ist *nicht* outerplanar.
- $K_{2,3}$ ist *nicht* outerplanar.

Proposition 11.37. Ein Graph G ist genau dann outerplanar, wenn der "Kegel" G^* über G planar ist, d.h. G^* entsteht, indem man einen neuen Knoten x^* zu G hinzufügt, der mit allen Knoten von G verbunden ist.

Außerdem gilt:

Proposition 11.38. G enthält genau dann eine K_4 -Unterteilung wenn G^* eine K_5 -Unterteilung enthält.

G enthält genau dann eine $K_{2,3}$ -Unterteilung, wenn G^* eine $K_{3,3}$ Unterteilung enthält.

Beweis: klar

Conclusion 11.39. G ist genau dann outerplanar, wenn G keine K_4 - und keine $K_{2,3}$ -Unterteilung enthält.

12. GRAPHENFÄRBUNGEN

12.1. Definitionen und einfache Beobachtungen.

Definition 12.1. Betrachte eine Graphen G . Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist die kleinste Zahl k , für die eine Abbildung $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ existiert mit $c(x) \neq c(y)$ für alle Kanten $\{x, y\} \in E$.

Alternativ: $c^{-1}(i)$ ist unabhängig für alle i .

Zerlege den Graphen in seine Farbklassen. Daraus ergibt sich

$$\chi(G) = k \Leftrightarrow G \text{ ist ein } k - \text{partiter Graph.}$$

Daraus ergeben sich folgende Aussagen:

- G ist 2-färbbar $\Leftrightarrow G$ ist bipartit $\Leftrightarrow G$ hat keine Kreise ungerader Länge.
- $\chi(K_n) = n$
- Ist H ein Untergraph von G , dann gilt

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

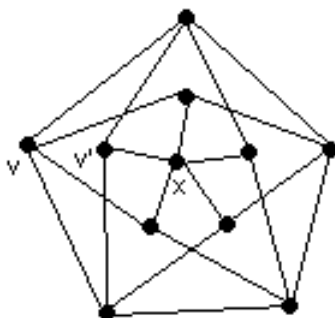


ABBILDUNG 97. Die Schranke ist sehr schlecht...

- Sei $\omega(G)$ die Cliquenzahl, d.h. die maximale Knotenzahl eines vollständigen Untergraphen von G . Dann folgt

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

- Sei $\alpha(G)$ die Unabhängigkeitszahl, d.h. die maximale Größe einer unabhängigen Menge in G [$\alpha(G) = \omega(\overline{G})$], dann ergibt sich

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}.$$

Wie gut ist die Schranke $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$?

Ziemlich schlecht!

Example 12.2. Betrachte $G = K_n \cup \overline{K}_n$. Dann gilt $n(G) = 2n$, $\alpha(G) = n$ und $\chi(G) = n$.

Wie gut ist die Schranke $\chi \geq \omega$?

Example 12.3.

Beobachtung: G ist nicht 3-färbbar.

Beweis: Angenommen G ist 3-färbbar. Dann gibt es Knoten v_1, v_2, v_3 auf dem äußeren 5-Kreis, so dass Farbe von $v_i = i$ und v_i hat j und k gefärbte Nachbarn. In einer 3-Färbung von G hat v'_i die gleiche Farbe wie v_i , weil die äußeren Nachbarn von v_i auch Nachbarn von v'_i sind. Also kann x nicht mit 1, 2 oder 3 gefärbt werden.

Es gibt dreiecksfreie Graphen mit beliebig großer chromatischer Zahl.

12.2. Greedy-Färbungen. Eine obere Schranke erhalten wir durch die Greedy-Färbung: Sei v_1, \dots, v_n eine Ordnung der Knoten von G . Definiere $c(v)$ von links nach rechts mit

$$c(v_j) = \min(\mathbb{N} \setminus \{\text{Farben, die schon bei Nachbarn von } v_j \text{ verwendet wurden}\})$$

Example 12.4. Die Greedy-Färbung hängt von der Nummerierung der Knoten ab und kann damit unterschiedliche obere Schranken produzieren.

Proposition 12.5. *Es gilt*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Beweis. Die Greedy-Färbung benutzt für jeden Knoten die kleinste Farbe, die nicht schon ein Nachbar hat. Jeder hat aber höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn. $c(v) \leq d_v + 1$, also $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. □

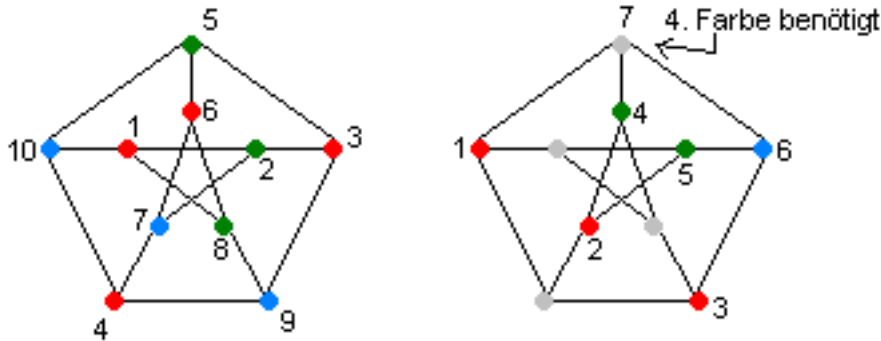


ABBILDUNG 98. Mit der ersten Nummerierung ist der Graph 3-färbbar, mit der zweiten nicht

12.3. Degeneriertheit.

Definition 12.6. Ein Graph heißt k -degeneriert, wenn es eine Ordnung der Knoten gibt, in der jeder Knoten hinter höchstens k seiner Nachbarn liegt.

Proposition 12.7. Ist ein Graph G k -degeneriert, dann gilt

$$\chi(G) \leq k + 1.$$

Beweis. Betrachte die Greedy-Färbung mit der Ordnung, die beweist, dass G k -degeneriert ist. $\Rightarrow \forall v$ ist $c(v) \leq k + 1$. □

Conclusion 12.8. Daraus folgern wir:

- Bäume und Wälder sind 2-färbbar, weil sie 1-degeneriert sind.
- Outerplanare Graphen sind 2-färbbar, weil sie 2-degeneriert sind.
- Es gilt sogar:
 Jeder outerplanare Graph mit mehr als 4 Knoten besitzt zwei Knoten mit Grad ≤ 2 , die nicht benachbart sind.
 Die Aussage lässt sich leicht durch Induktion beweisen.

12.4. **Art Gallery Theorem.** Betrachte ein Museum ist (Polygon). Ziel ist es, möglichst wenig Wächter so zu platzieren, dass jeder Punkt des Museums überwacht ist.

Dabei interessieren wir uns für eine Schranke in Abhängigkeit von n , der Anzahl der Ecken des Polygons. Um die Spitze eines Zackens zu überwachen, benötigt man einen Wächter im Zackendreieck. Diese sind disjunkt, also ist die Anzahl der Wächter mindestens so groß wie die Anzahl der Zacken. $n = 3 \cdot \text{Anzahl Zacken}$. Damit erhalten wir, dass die Anzahl der Wächter mindestens $\frac{n}{3}$ ist.

Theorem 12.9. Für jedes Museum genügen $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter.

Beweis. Wir betrachten eine Triangulierung des Polygons. Dies ist ein outerplanarer Graph mit n Knoten. Dieser Graph kann 3-gefärbt werden.

Behauptung: Jede Farbklasse ist eine gültige Wächtermenge.

Beweis: Jedes Dreieck der Triangulierung enthält einen Knoten in jeder Farbklasse. Die kleinste Farbklasse enthält höchstens $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Knoten. □

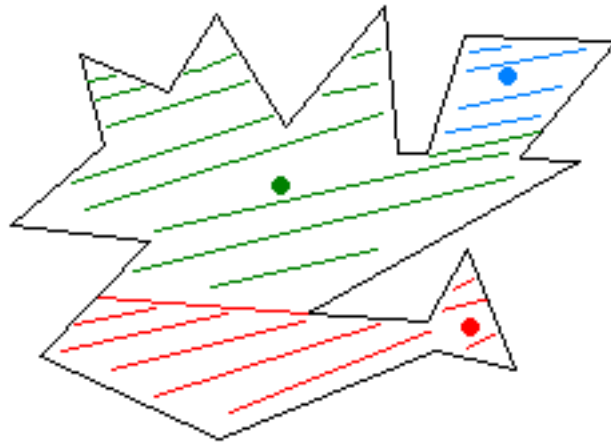


ABBILDUNG 99. Hier genügen 3 Wächter

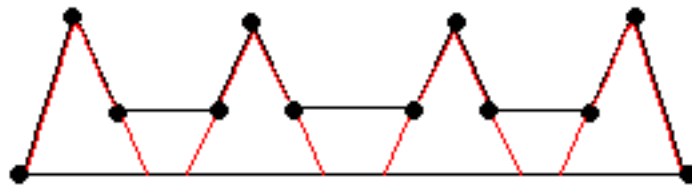


ABBILDUNG 100. Zacken eines Museums

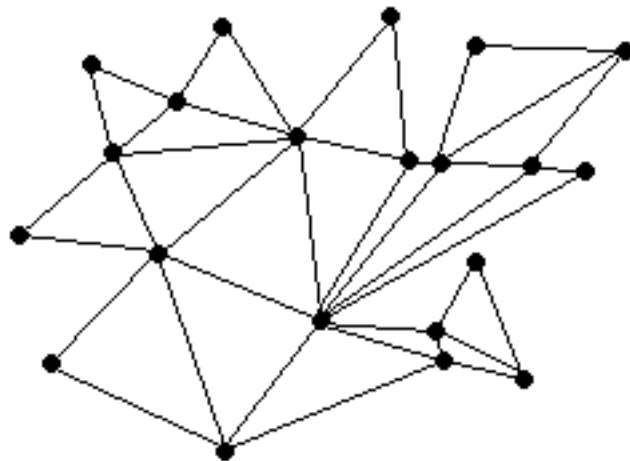


ABBILDUNG 101. Trianguliertes Museum

12.5. Färbung planarer Graphen.

Proposition 12.10. *Planare Graphen sind 5-degeneriert.*

Beweis. Jeder planare Graph besitzt einen Knoten vom Grad ≤ 5 ...

Daraus folgt

$$\chi(G) \leq 6$$

für alle planaren Graphen G . (Wir wissen allerdings, dass auch 4 Farben genügen!)

□

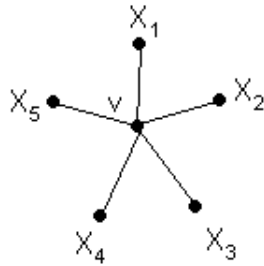
Theorem 12.11 (Heawood). *Für jeden planaren Graphen G gilt*

$$\chi(G) \leq 5.$$

Beweis. Induktion: Für $n \leq 5$ ist die Behauptung klar.

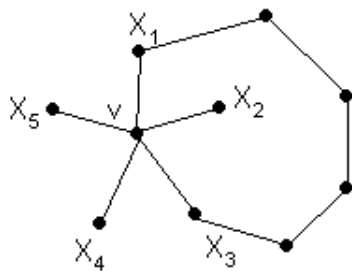
Sei ein Graph G mit $n + 1$ Knoten gegeben. G besitzt Knoten v mit $\deg(v) \leq 5$ und $G \setminus v$ besitzt eine 5-Färbung. Falls in der Menge $N(v)$ nicht alle 5 Farben vorkommen, sind wir fertig.

Seien x_i die Nachbarn von v .



Betrachte nun $H(i, j)$, den von Knoten der Farben i und j induzierten Untergraphen von $G \setminus v$. Wenn x_i und x_j in verschiedenen Komponenten von $H(i, j)$ liegen, können die Farben i und j in der Komponente, die x_i enthält getauscht werden. Damit wird Farbe i frei für v .

Wenn $H(1, 3)$ keinen Tausch erlaubt, existiert ein 1,3-gefärbter Pfad von x_1 nach x_3 . Zusammen mit v ist das ein Kreis C .



Der Kreis C hat innen und außen (Jordan). Betrachtung von v : x_2 und x_4 sind von C getrennt. Daraus folgt x_2 und x_4 sind in verschiedenen Komponenten von $H(2, 4)$. □

12.6. Kempes falscher 4-Farben-Beweis. Auf ähnliche Art meinte Kempe, einen Beweis für den 4-Farben-Satz gefunden zu haben. (Eigentlich ist Heawoods Beweis auf diesen zurückzuführen, denn als er feststellte, dass Kempes Beweis falsch ist, bemerkte er auch, dass man damit aber zumindest den 5-Farben-Satz beweisen kann.)

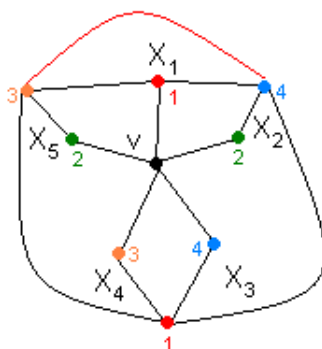
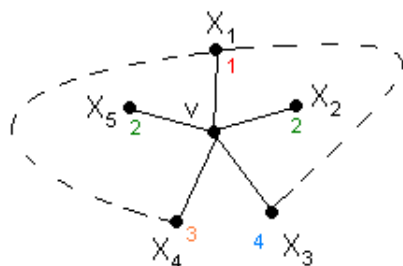


ABBILDUNG 102. Wenn 2,4 und 2,3 umgefärbt werden, hat die rote Kante zwei Enden mit 2.

Kempes "Beweis":

Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = 5$, sei $G \setminus v$ mit 4 Farben färbbar. (Wir wollen zeigen, dass es kein minimales Gegenbeispiel gibt.) Enthält $N(v)$ nicht alle vier Farben, bleibt natürlich eine für v übrig. Enthalte $N(v)$ also alle vier Farben.



Wenn x_1, x_3 in verschiedenen Komponenten $H(1, 3)$ liegen, sind wir fertig. Wenn x_1 und x_4 in verschiedenen $H(1, 4)$ Komponenten liegen, sind wir ebenfalls fertig.

Wir nehmen also an, es gibt Ketten von x_1 nach x_3 und von x_1 nach x_4 . Also müssen x_3 und x_5 in verschiedenen $H(2, 3)$ Komponenten liegen und x_2, x_4 in verschiedenen $H(2, 4)$ Komponenten. Wir führen zwei Farbtäusche durch, so dass $c(x_5) = 3$ und $c(x_2) = 4$. Damit erhalten wir eine freie Farbe für v ...

Stimmt aber nicht!

12.7. **Plan für einen richtigen Beweis.** Beweisidee für den 4 Farben Satz:

- Ursprünglicher Beweis von Appel und Haken 1976 (haben 1478 unvermeidbare Konfigurationen betrachtet).
- Robertson, Sanders, Seymour, Thomas 1994 (haben 633 unvermeidbare Konfigurationen betrachtet). Kürzerer Beweis und nachvollziehbarere Programme...

Es genügt, planare Triangulierungen zu betrachten (maximal planare Graphen, alle Flächen sind Dreiecke, $m = 3n - 6$, $f = 2n - 4$).

Jede planare Triangulierung enthält einen Knoten vom Grad 3, 4 oder 5.

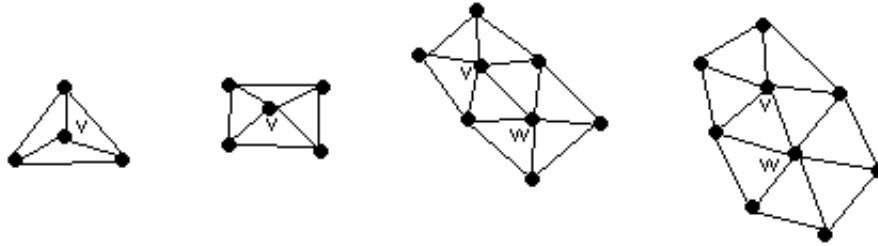


ABBILDUNG 103. unvermeidbare Menge von Konfigurationen

Eine Konfiguration ist *reduzibel*, wenn sie in keinem minimalen Gegenbeispiel enthalten ist. Man sucht also sämtliche unvermeidbare Konfigurationen und zeigt, dass sie reduzibel sind.

Example 12.12. Der Knoten vom Grad 3 ist reduzibel: Färbe $G \setminus v$ mit 4 Farben und erweitere diese Färbung auf G .

Example 12.13. Der Knoten vom Grad 4 ist reduzibel: Färbe $G \setminus v$ mit 4 Farben. Wenn in der Nachbarschaft von v alle vier Farben auftreten (wenn nicht, sowieso kein Problem), dann färben wir wie folgt um: wenn x_1 und x_3 in verschiedenen Komponenten von $H(1, 3)$ liegen, dann kann man einen Farbtausch in einer der Komponenten vornehmen. Andernfalls beweist die 1-3-Kette, dass x_2 und x_4 in verschiedenen Komponenten von $H(2, 4)$ liegen. Wir können umfärben, und es bleibt eine Farbe für v .

12.7.1. *Unvermeidbare Konfigurationen und Entladung.*

Proposition 12.14. *Jede planare Triangulierung enthält einen Knoten vom Grad drei, einen vom Grad vier, zwei benachbarte Knoten vom Grad fünf, oder einen Knoten vom Grad fünf mit einem Nachbarn vom Grad sechs.*

Beweis. Sei G eine planare Triangulierung mit $d_v \geq 5 \forall v$, (denn wenn wir einen Knoten vom Grad 3 oder 4 haben, sind wir schon fertig, s.o.). Gib jedem Knoten eine Ladung von $6 - d_v$, d.h. wir erhalten auch negative Ladungen für $d_v \geq 7$. Die Gesamtladung im Graphen ist

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} (6 - d_v) &= \sum_{v \in V} 6 - \sum_{v \in V} d_v \\ &= 6n - 2m \\ &= 6n - 2(3n - 6) \\ &= 12. \end{aligned}$$

Verschieben von Ladungen (Entladung):

- Jeder Knoten vom Grad 5 gibt $\frac{1}{5}$ Ladung an jeden Nachbarn ab.

Wo sitzt die positive Ladung jetzt?

1. Fall: Es gibt einen Knoten v vom Grad 5 mit positiver Ladung. Dann hat v Nachbarn w vom Grad 5. (3. Fall oben)

2. Fall: Es gibt einen Knoten w vom Grad 6 mit positiver Ladung. Dann hat w einen Nachbarn vom Grad 5. (4. Fall oben)

3. Fall: Es gibt einen Knoten v vom Grad 7 mit positiver Ladung. Der Knoten hatte ursprünglich eine Ladung von -1, muss also mindestens 6 Nachbarn vom Grad 5 haben. Von diesen sind mindestens zwei benachbart. (3. Fall oben)

4. Fall: Knoten vom Grad 8 und mehr können nicht positiv werden, weil

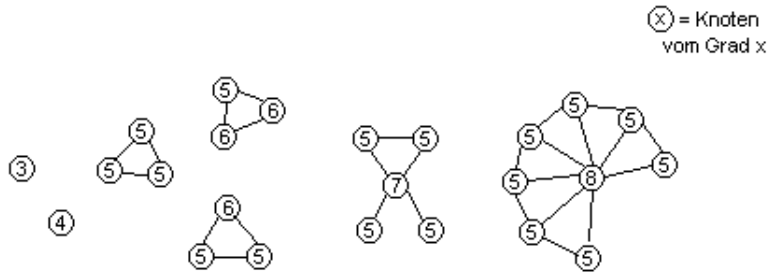


ABBILDUNG 104. Eine weitere Menge von unvermeidbaren Konfigurationen

$$\underbrace{6 - d_v}_{\text{Anfangsladung}} + \frac{d_v}{5} < 0 \text{ f\"ur } d_v > 7, 5. \quad \square$$

Proposition 12.15. Die folgende Menge von Knotengraden ist unvermeidbar: $\{3, 4, 5-5-5, 5-5-6, 6-5-6\}$. ("k-l" heißt, ein Knoten vom Grad k ist mit einem vom Grad l benachbart.)

Beweis. Anfang wie gehabt. Entladungsregel:

Knoten vom Grad 5 schieben $\frac{1}{4}$ auf ihre Nachbarn v mit $d_v \geq 7$.

Sei v ein Knoten mit positiver Ladung.

Fall 1: $d_v = 5$: Dann hat v höchstens 3 Nachbarn vom Grad ≥ 7 . Dann gibt es mindestens zwei Nachbarn vom Grad ≤ 6 . Also ist v Mittelknoten von einer der obigen Konfigurationen.

Fall 2: $d_v = 6$: Dies kann nicht sein. Der Knoten v hat eine Anfangsladung von 0 und bekommt nichts!

Fall 3: $d_v = 7$: Der Knoten v hat mindestens fünf Nachbarn vom Grad 5. Er hat also höchstens zwei Nachbarn, die nicht vom Grad 5 sind. Man bekommt also immer eine Kette 5-5-5.

Andere Fälle gibt es nicht! $(6 - d_v) + \frac{d_v}{4} \leq 0$ für $d_v \geq 8$. □

Note 12.16.

Beweisidee: Entlade Knoten vom Grad 5 mit $\frac{1}{3}$ auf Nachbarn mit Grad ≥ 7 .

12.7.2. Reduzierbarkeit.

Definition 12.17. Eine Konfiguration ist *reduzierbar*, wenn sie in keinem minimalen Gegenbeispiel für den 4-Farben-Satz auftreten kann.

Example 12.18. Wir haben schon gesehen, dass Knoten vom Grad 3 bzw. 4 reduzierbar sind.

Proposition 12.19. Jedes minimale Gegenbeispiel ist 4-zusammenhängend. (Sogar 5-zusammenhängend, siehe unten.)

Triangulierung ist nicht 4-zusammenhängend, wenn es ein trennendes Dreieck gibt.

Zu zeigen: trennende Dreiecke können in minimalem Gegenbeispiel nicht auftauchen.

Beweisidee:

Färbe G ohne das Innere des Dreiecks. Färbe das Dreieck mit seinem Inneren. Verklebe die Färbungen. (Tausche die Farbklassen des inneren Dreiecks dann so

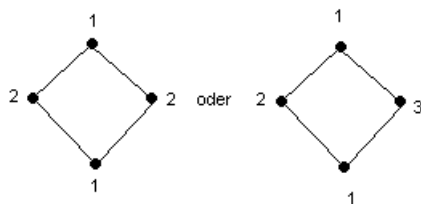


ABBILDUNG 105. Mögliche Färbungen auf dem Ring

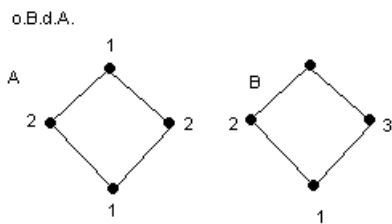


ABBILDUNG 106. Färbungen von A und B

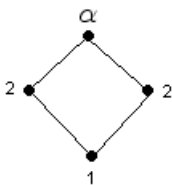


ABBILDUNG 107. Die Farbe für α ist noch frei

aus, dass die Ecken des Dreiecks der inneren Färbung mit den Farben des äußeren übereinstimmen)

Proposition 12.20. *Der 4-Ring (einfacher 4-Kreis mit nichtleerem Inneren) ist reduzierbar.*

Beweis. Bezeichne die Ringknoten mit x_1, x_2, x_3, x_4 . A bezeichne den Ring mit seinem Inneren und B den Ring mit seinem Äußeren. In A und B identifizieren wir x_1 und x_3 . Es gibt je eine 4-Färbung, da diese Graphen kleinere Knotenzahl haben. Färbung auf dem Ring:

Wenn die Färbungen von A und B auf dem Ring gleich sind, sind wir fertig.

Wenn x_2 und x_4 in A oder in B in verschiedenen $H(2, 3)$ Komponenten liegen, können wir die Färbungen von 2, 3 in einer Komponente umtauschen und sind damit fertig.

Ansonsten gibt es in A und B 2-3-Ketten von x_2 nach x_4 .

Betrachte die Färbung von B' , die man bekommt, wenn man x_2 und x_4 identifiziert.

Wenn $\alpha = 1$, dann sind wir fertig.

Wenn $\alpha = 4$: Betrachte $H(1, 4)$ in A und B' . Wenn x_1 und x_3 in einen von beiden in verschiedenen Komponenten sind: Farben tauschen, fertig. sind

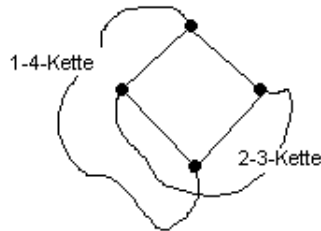


ABBILDUNG 108. 1-4- und 2-3 Ketten können sich nicht schneiden...

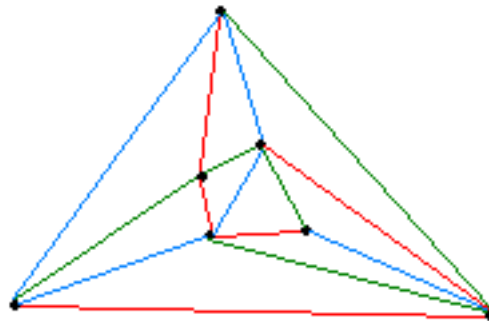


ABBILDUNG 109. Kantenfärbung nach Tait

Ansonsten gibt es 1-4-Ketten von x_1 nach x_3 in A und B' . Widerspruch, weil wir in A eine 2-3-Kette gefunden haben, die x_2 und x_4 verbindet und eine 1-4-Kette, die x_1 mit x_3 verbindet. Diese müssen sich aber schneiden.

□

Conclusion 12.21. Jedes minimale Gegenbeispiel ist 5-zusammenhängend!

12.8. Kantenfärbung nach Tait.

Theorem 12.22 (Satz von Tait). *Eine planare Triangulierung T kann mit vier Farben gefärbt werden \Leftrightarrow die Kanten von T können mit drei Farben so gefärbt werden, dass jedes Dreieck alle drei Farben enthält.*

Beweis. " \Rightarrow " Färbe die Knoten von T mit den Elementen der Kleinschen Vierergruppe. Diese Färbung sei $f : V \rightarrow \{0, a_1, a_2, a_3\}$.

Die *Kleinsche Vierergruppe* besteht aus den vier Elementen $\{0, a_1, a_2, a_3\}$ und ist eine additive Gruppe. Außerdem ist sie selbstinvers, also $a_i + a_i = 0$ und das neutrale Element ist 0.

Definiere Kantenfärbung:

$$g : E \rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$$

wobei $g(\{x, y\}) = f(x) + f(y)$.

Behauptung: g hat die gewünschten Eigenschaften:

- $g(\{x, y\}) \neq 0$ für alle $\{x, y\} \in E$. (Da f legal, also $f(x) \neq f(y)$ ist.)

+	0	a_1	a_2	a_3
0	0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	0

ABBILDUNG 110. Kleinsche Vierergruppe

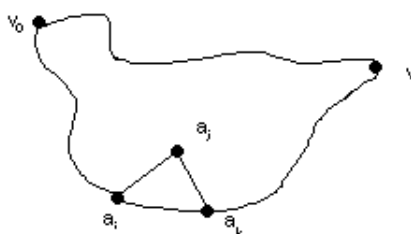


ABBILDUNG 111. Homotopie-Argument: Umweg hat gleiche "Farbe" wie vorheriger Weg, über Dreiecke kann man zum anderen Weg kommen.

- In jedem Dreieck kommen alle drei Farben vor: Angenommen nicht: Dann hätten wir ein Dreieck x, y, z mit $g(\{x, y\}) = g(\{x, z\}) = a_i$. Also ist $f(y) = a_i + f(x)$ und $f(z) = a_i + f(x)$ und damit ist $f(y) = f(z)$. Widerspruch!
- " \Leftarrow " Sei $g : E \rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ gegeben. Wir definieren $f : V \rightarrow \{0, a_1, a_2, a_3\}$. Sei $v_0 \in V$, wir definieren $f(v_0) = 0$. Für $v \neq v_0$ betrachte eine Weg

$$W_v := v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$$

mit $v_k = v$. Setze $f(v) = \sum_{i=0}^{k-1} g(\{v_i, v_{i+1}\}) = h(W_v)$.

Behauptung: Die Farbe von v hängt nicht von der Wahl des Weges W_v ab.

Die Funktion h : Wege in $T \rightarrow \{0, a_1, a_2, a_3\}$ hat die Eigenschaft:

Unterscheiden sich zwei Wege W und W' nur in einem Dreieck, dann folgt $h(W) = h(W')$. Aus der Iteration dieses Argumentes folgt: für je zwei Wege W und W' mit denselben Endpunkten gilt $h(W) = h(W')$. \square

Behauptung: Die Färbung f ist legal.

Beweis: Sei $\{x, y\}$ Kante. Zu zeigen: $f(x) \neq f(y)$.

$$f(x) = h(W_x) \text{ und } f(y) = h(W_x) + \underbrace{g(\{x, y\})}_{a_i \neq 0}$$

Also gilt

$$f(y) = f(x) + a_i \neq f(x)$$

\square

Überträgt man die Tait'sche Kantenfärbung von T auf den dualen Graphen, dann bekommt man eine Kantenfärbung, so dass je zwei Kanten, die einen gemeinsamen

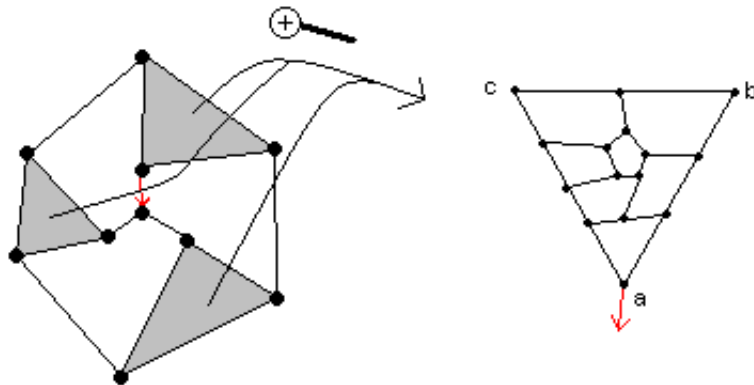


ABBILDUNG 112. Es ist unmöglich diesen Teilgraphen bei b zu betreten (muss man aber einmal, siehe Mitte), alle Knoten zu besuchen und bei c zu enden.

Knoten besitzen, verschieden gefärbt sind. So eine Färbung heißt *legale Kantenfärbung*.

$\chi'(G)$ =minimale Anzahl von Farben in einer legalen Kantenfärbung

Die Kantenfärbungszahl von G bezeichnet man auch als *chromatischen Index*.

Theorem 12.23 (Satz von Tait 2). *Sei T eine planare Triangulierung dann gilt*

$$\chi(T) \leq 4 \Leftrightarrow \chi'(T^*) \leq 3.$$

Note 12.24. T^* ist planar und 3-regulär.

Proposition 12.25. *Sei G planar, 3-regulär und hamiltonsch (d.h. es existiert ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal besucht). Dann ist*

$$\chi'(G) \leq 3.$$

Beweis. Sei C der Hamiltonkreis. $E \setminus C$ ist ein Matching (Kantenmenge, die jeden Knoten höchstens einmal trifft). Sei $E \setminus C$ eine Farbklasse. Der Kreis C hat gerade Länge, wobei $\text{Länge}(C) = \text{Anzahl Knoten von } G = n$. Wir wissen $3n = 2|E|$. Also ist n gerade. Der Kreis kann jetzt also durch Alternieren der Farben in zwei Farbklassen aufgeteilt werden. \square

Tait hat in einer Arbeit von 1878 behauptet, dass jeder planare 3-reguläre Graph hamiltonisch ist. Dies hat sich allerdings als falsch herausgestellt.

Example 12.26. Gegenbeispiel von Tutte (1946).

Note 12.27. Bemerkungen zu $\chi'(G)$

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$
- Nichttrivial aber wahr: Für G bipartit gilt:

$$\chi(G) = \Delta(G).$$

(folgt aus der Theorie der Matchings für bipartite Graphen)

- $\chi'(G)$ kann größer sein als $\Delta(G)$, betrachte zum Beispiel den Petersen-Graphen.

Theorem 12.28 (Vizing 1964). *Für jeden Graphen G gilt*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

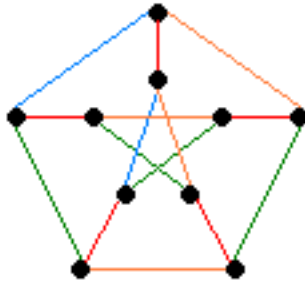


ABBILDUNG 113. Beim Petersen-Graphen ist $\chi' = 4$

Schrijver. Wir zeigen folgende Aussage mit Induktion nach k :

Sei v ein Knoten in G mit $\deg(v) \leq k$ und höchstens ein Knoten $u \in N(v)$ hat $\deg(u) = k$ und $\deg(w) \leq k - 1$ für alle $w \in N(v) \setminus \{u\}$. Wenn $G \setminus v$ k -kantenfärbbar ist, dann auch G .

Hieraus folgt der Satz, wie folgt: Sei G gegeben, v Knoten mit $\deg(v) = \Delta = k - 1$. Der Graph \tilde{G} entsteht aus G in dem v eine Extrakante bekommt. Der Knoten v erfüllt in \tilde{G} die Bedingungen. Der Graph $\tilde{G} \setminus v$ hat Maximalgrad $k - 1$ und weniger Knoten. $\stackrel{IV}{\Rightarrow} \chi'(\tilde{G} \setminus v) \leq k$. Daraus folgt mit obiger Behauptung $\chi'(\tilde{G}) \leq k$. Also ist $\chi'(G) \leq k = \Delta + 1$.

Bleibt, obige Behauptung mit Induktion zu beweisen.

IA: $k = 1$ klar

IS: Seien G, v so, dass die Bedingungen erfüllt sind. Ergänze Kanten mit Grad-1-Enden, so dass gilt: $\deg(v) = k, \deg(u) = k, \deg(w) = k - 1$ für alle $w \in N(v) \setminus u$.

Sei G^* der neue Graph. $G^* \setminus v$ ist k -Kantenfärbbar, da $G \setminus v$ es ist. Unter allen k -Kantenfärbungen von $G^* \setminus v$ wähle eine, die

$$\sum_{i=1}^k |X_i|^2$$

minimiert, wobei X_i die Menge der Nachbarn von v ist, die keine i gefärbte Kante haben.

Falls $\exists i$ mit $|X_i| = 1$: Sei $X_i = \{u^*\}$. Betrachte $G^{**} = G^* \setminus (E_i \cup \{v, u^*\})$, wobei E_i die i gefärbten Kanten in der Färbung von $G^* \setminus v$ bezeichne. In G^{**} ist der Grad jedes Nachbarn von v und der von v um eins kleiner als in G . Der Graph $G^{**} \setminus v$ ist $(k - 1)$ -kantenfärbbar (verwende Kantenfärbung von $G^* \setminus v$). Also ist G^{**} ist $(k - 1)$ -kantenfärbbar nach Induktionsvoraussetzung. Also ist G k -kantenfärbbar.

Andernfalls: kein X_i hat $|X_i| = 1$. Betrachte

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |X_i| &= 2|N(v)| - 1 \\ &= 2k - 1. \end{aligned}$$

Also existiert ein X_i mit $|X_i| = 0$, und es gibt ein X_j mit $|X_j|$ ungerade. Da wir $|X_j| = 1$ ausgeschlossen hatten, gilt also $|X_j| \geq 3$. Betrachte den Graphen der i und j gefärbten Kanten in $G^* \setminus v$. Dieser Graph ist Vereinigung von Kreisen und Pfaden. In der Nachbarschaft von v gibt es $|X_j|$ viele Endpunkte von Pfaden. Es existiert also ein Pfad mit genau einem Endpunkt in $N(v)$. Tausche die Farben i und j in diesem Pfad. Daraus erhalten wir wieder ein legale Färbung, die die Werte



ABBILDUNG 114. Torus und Doppeltorus



ABBILDUNG 115. Auf zwei Löcher wird ein Henkel gesetzt.



ABBILDUNG 116. Kreuzungen werden mit Henkeln vermieden

$|X_i^{neu}| = |X_i^{alt} + 1| = 1$ und $|X_j^{neu}| = |X_j^{alt} - 1|$ hat. Aber

$$\sum_{i=1}^k |X_i^{neu}|^2 = \sum_{i=1}^k |X_i^{alt}| - 2|X_j^{alt}| < \sum_{i=1}^k |X_i^{alt}|^2$$

Widerspruch, da wir minimieren wollten. Wir sind also immer im ersten Fall.
 ⇒ Behauptung □

12.9. Graphen auf Flächen. Wir betrachten im folgenden Flächen ohne Rand, z.B. Sphäre, Torus Doppeltorus etc.

An eine (randlose) Fläche kann man Henkel ankleben.

Note 12.29. Jeder Graph kann kreuzungsfrei in eine Fläche mit Henkeln eingebettet werden.

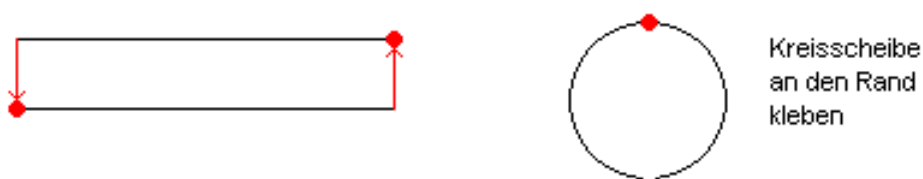


ABBILDUNG 117. Die roten Punkte werden identifiziert



ABBILDUNG 118. Der Torus ist keine 2-Zelle

Dabei ist die Anzahl der Henkel die dafür nötig sind, höchstens so groß wie die Anzahl der Kanten, die man entfernen muss, um den Graphen planar zu machen.

12.9.1. *Klassifikation und 2-Zell-Einbettung.* Jede randlose Fläche ist homöomorph zu einer Sphäre S_h mit h Henkeln, $h \geq 0$ oder einer projektiven Ebene P_h mit h Henkeln, $h \geq 0$. Dabei bezeichnet h das "Geschlecht" der Fläche. Die Sphäre S_h ist orientierbar, die projektive Ebene P_h nicht.

Example 12.30. Bei der Zeichnung einer projektiven Ebene, werden Randpunkte miteinander identifiziert. Beim Möbiusband sähe das folgendermaßen aus:

Definition 12.31. Eine 2-Zelle ist ein Gebiet auf einer Fläche, in dem jede einfach geschlossene Kurve stetig zu einem Punkt kontrahiert werden kann.

Example 12.32.

Definition 12.33. Eine 2-Zell-Einbettung eines Graphen G ist eine kreuzungsfreie Einbettung in eine Fläche, so dass alle Gebiete des Graphen 2-Zellen sind.

12.9.2. *Euler-Formel auf S_h .*

Proposition 12.34. Sei G zusammenhängend und 2-Zell-eingebettet in S_h , dann gilt

$$|V| - |E| + |F| = 2 - 2h,$$

wobei $2 - 2h$ die Euler-Charakteristik von S_h ist.

Beweis. Idee: Kontrahiere Kante, wobei Multikanten nicht gelöscht werden. Dies löscht also genau eine Kante und einen Knoten. Schließlich hat man einen Knoten

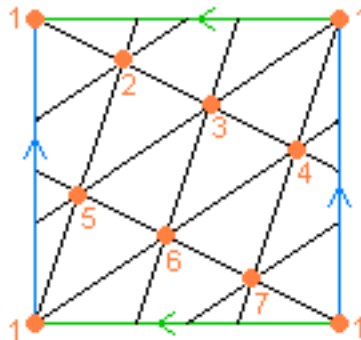


ABBILDUNG 119. K_7 auf Torus eingebettet (beachte: die “4” Eckknoten sind nur einer)

und viele Schleifen. Entferne die Schleifen, wenn die 2-Zell-Eigenschaft dadurch nicht verloren geht. Dies löscht je eine Kante und eine Fläche. Es bleibt eine Menge von Schleifen, die alle Henkel plättchen, also eine Fläche darstellen. Je Henkel erfordert das zwei Schleifen. Also braucht der Torus zwei Schnitte um 2-zellig zu werden. \square

Conclusion 12.35. Eine 2-Zell-Einbettung eines zusammenhängenden Graphen auf S_h hat höchstens $3(n - 2 + 2h)$ Kanten.

Beweis. Es gilt

$$3|F| \leq 2|E|$$

und

$$3|V| - 3|E| + 3|F| = 3(2 - 2h)$$

Daraus erhalten wir

$$3|V| - |E| \geq 3(2 - 2h)$$

und das ist äquivalent zu

$$|E| \leq 3|V| - 3(2 - 2h).$$

\square

Example 12.36. Der K_7 hat 21 Kanten. Es gilt

$$|E| \leq 3|V|,$$

wir können ihn also auf einem Torus einbetten.

12.9.3. *Satz von Heawood.*

Theorem 12.37 (Heawood, 1890). *Wenn der Graph G auf der Sphäre S_h 2-Zell-einbettbar mit $h > 0$ ist, dann gilt*

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48h}}{2} \right\rfloor.$$

Example 12.38. Für $h = 0$ gäbe uns die Formel $\chi \leq 4$. Dies stimmt natürlich ebenfalls, dafür ist aber dieser Beweis nicht geeignet. (Setzt $h > 0$ voraus.)

Für $h = 1$ erhalten wir $\chi \leq 7$. Die Abbildung von K_7 auf einem Torus haben wir oben schon betrachtet.

Für $h = 2$ ist $\chi \leq 8,4$ und für $h = 3$ gilt $\chi \leq 9,5$. Von da an wächst χ pro Schritt weniger als 1.

Beweis. Sei $c_n = \frac{7+\sqrt{1+48h}}{2}$. Wir behaupten, dass G einen Knoten vom Grad kleiner gleich $c_h - 1$ besitzt. Das heißt, G ist $\lfloor c_n - 1 \rfloor$ -degeneriert und daraus folgt $\chi \leq \lfloor c_n \rfloor$.

Sei also $n > c_h$, wobei wir im folgenden $c_h = c$ setzen. Dann gilt

$$c^2 - 7c + (12 - 12h) = 0.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $\frac{1}{c}$ erhalten wir

$$c - 1 = 6 - \frac{(12 - 12h)}{c}$$

und können damit folgende Rechnung aufstellen:

$$\begin{aligned} \frac{2|E|}{n} &\leq \frac{6(n - 2 + 2h)}{n} \\ &= 6 + \frac{6(2h - 2)}{n} \\ &\leq 6 + \frac{6(2h - 2)}{c} \\ &= 6 - \frac{(12 - 12h)}{c} \\ &= c - 1. \end{aligned}$$

Wenn der mittlere Grad $(\frac{2|E|}{n})$ kleiner gleich $c - 1$ ist, gibt es einen Knoten vom Grad kleiner gleich $c - 1$. \square

12.10. Satz von Brooks. Es stellt sich die Frage, wie man Graphen konstruieren kann, die auf allen Flächen genau diese chromatische Zahl haben. (Ringel, Young; 1968). Durch die Greedy-Färbung hatten wir $\chi \leq \Delta + 1$ erhalten.

Theorem 12.39 (Brooks, 1941). *Sei G zusammenhängend und weder vollständig noch ein Kreis ungerader Länge. Dann gilt*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Beweis. Sei $k = \Delta(G)$. Für $k = 0, 1, 2$ kann man die Aussage direkt nachprüfen. Sei k also ≥ 3 .

1. Fall: G hat einen Knoten v mit $d(v) < k$. Sei T aufspannender Baum und \vec{T} die Orientierung von T mit Senke v . Sei weiter v_1, \dots, v_n eine Ordnung, die alle Kanten von \vec{T} von links nach rechts auslegt (d.h. $v = v_n$). Für alle v_i mit $i < n$ gibt es einen Nachbarn rechts von v_i , d.h. v_i bekommt eine Farbe $\leq d(v_i) \leq k$. Der Knoten v_n bekommt eine Farbe $\leq d(v) + 1 \leq k$.

2. Fall: Der Graph ist k -regulär.

(1) Behauptung: wir dürfen annehmen, dass G keine trennenden Mengen der Größe 1 oder 2 besitzt, d.h. G ist mindestens 3-zusammenhängend.

Beweis:

Fall a): Der Graph G hat einen trennenden Knoten: Jedes $G_i \cup \{v\}$ erfüllt die Bedingungen von Fall 1. Dann können wir die Färbungen verkleben (gegebenenfalls vorher Permutieren).

Fall b): G hat trennende Menge x und y der Größe 2. Wir dürfen annehmen, dass $d(x) + d(y)$ in jeder Komponente höchstens den Wert $2k - 3$ annimmt.

Betrachte G_i mit der Kante $\{x, y\}$. Da der Grad von x oder y in $G_i \cup \{x, y\}$ kleiner als k ist, existiert nach Fall 1 eine k -Färbung. Diese k -Färbungen können wieder miteinander verklebt werden.

(2) G zusammenhängend, k -regulär und nicht vollständig. Dann folgt, dass es drei Knoten x, y, z gibt, die einen 3-Pfad induzieren. Sei $G' = G \setminus \{x, y\}$, T ein aufspannender Baum von G' , \vec{T} eine Orientierung von T mit Senke z und v_2, \dots, v_n eine zugehörige Ordnung der Knoten. Betrachte: $x, y, v_2, \dots, v_{n-1}, z$. Greedy gibt:

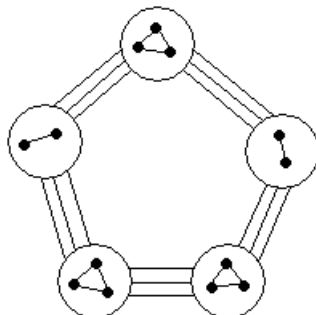


ABBILDUNG 120. Gegenbeispiel zu Hajos Vermutung

Farbe(x) = Farbe(y) = 1. Für v_2, \dots, v_{n-1} erhalten wir je eine Farbe kleiner gleich k , weil eine Kante nach rechts zeigt. Für z bekommen wir Farbe $\leq k$, weil 2 Vorgänger dieselbe Farbe haben. \square

12.11. **Vermutungen von Hadwiger und Hajos.** Betrachten wir die untere Schranke von $\chi(G)$. Wir hatten schon gesehen, dass

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

gilt. Aber aus $\chi(G) = k$ folgt nicht, dass G eine k - Clique enthält. (Beispiel: C_5 : enthält kein Dreieck, braucht aber 3 Farben). Es wurden zwei weitere Vermutungen aufgestellt:

Die *Hadwiger Vermutung* sagt: $\chi(G) \geq k$ impliziert, dass G einen K_k als Minor enthält. Diese Vermutung ist offenbar richtig für $k = 1, 2, 3$.

Proposition 12.40. *Die Hadwiger Vermutung gilt auch für $k = 4$.*

Beweis. Idee: Jeder 3-zusammenhängende Graph enthält K_4 als Minor. Betrachte also nur noch Graphen, die nicht 3-zusammenhängend sind, aber 4 Farben brauchen. Sei G 2-zusammenhängend. Dann ist $\chi(G) = 4$ nur, wenn eines der Teile vier Farben benötigt... \square

Hadwiger-5 impliziert den vier Farben Satz, weil Graphen, die 5 Farben brauchen, den K_5 enthalten und somit nicht planar sind. Es gilt sogar die umgekehrte Richtung. Hadwiger-6 wurde 1997 von Robertson, Seymour, Thomas bewiesen. Für alle weiteren k ist die Vermutung offen.

Die *Hajos Vermutung* sagt: $\chi(G) \geq k$ impliziert G enthält eine K_k -Unterteilung. Diese Vermutung ist falsch für $k \geq 7$.

Der Graph enthält 13 Knoten und die Unabhängigkeitszahl α ist 2. Daraus folgt, dass $\lceil \frac{n}{\alpha} \rceil = 7$, also $\chi(G) \geq 7$. Man überlegt sich, dass G keine K_7 -Unterteilung enthält. Auf ähnliche Weise erhält man auch für größere k Gegenbeispiele. Offen ist die Hajos-Vermutung für $k = 5$ und 6.

13. ZÄHLEN VON FÄRBUNGEN

Sei G ein Graph. Dann definieren wir zu diesem Graphen eine Zählfunktion $p_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, wobei $p_G(k) = \#$ zulässige k Färbungen von G .

Example 13.1. Definiere $n := |V(G)|$.

- (1) Sei $G = (V, \emptyset)$, d.h. $G = \overline{K}_n$, dann gilt: $p_G(k) = k^n$.
- (2) Sei G ein Weg. Dann gilt: $p_G(k) = k(k-1)^{n-1}$. (Für den ersten Knoten k Möglichkeiten, für alle weiteren $k-1$.)

- (3) Betrachte einen Stern. Dann gilt: $p_G(k) = k(k-1)^{n-1}$. (Für den "zentralen" Knoten k Möglichkeiten, für alle "äußeren" $k-1$.)
- (4) Auch für Bäume gilt: $p_G(k) = k(k-1)^{n-1}$. Lege den Baum so hin, dass jeder Knoten genau einen Vorgänger hat.
- (5) Sei $G = K_n$, der vollständige Graph. Dann ergibt sich als Zählfunktion $p_G(k) = k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot (k-n+1) := (k)_n$

Theorem 13.2. Die Zählfunktion $p_G(k)$ hat eine Darstellung als Polynom vom Grad $\leq n$. Konkret lässt sich $p_G(k)$ darstellen als

$$p_G(k) = \sum_{r=\chi(G)}^n q_r(G) \cdot (k)_r.$$

Dabei ist $q_r(G)$ die Anzahl der Partitionen von $V(G)$ in r unabhängige Mengen.

Beweis. Sei $f : V \rightarrow [k]$ eine Färbung. Und sei $R \subseteq [k]$ die Menge der tatsächlich genutzten Farben, $R = \{c_1, \dots, c_r\}$. Dann ist $\{f^{-1}(c_1), \dots, f^{-1}(c_r)\}$ eine Partition von V in unabhängige Mengen. Wieviele k -Färbungen induzieren eine feste Partition $\{I_1, \dots, I_r\}$ von V in r unabhängige Mengen? Die Antwort lautet: Für I_1 haben wir k Farben zur Auswahl, für I_2 nur noch $k-1$... und somit erhalten wir $k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-r+1)$ Möglichkeiten die Farben festzulegen.

Da jede k -Färbung von einer Partition kommt, ist $p_G(k) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(G)(k)_r$. Da die Partitionen in unabhängige Mengen mindestens $\chi(G)$ und höchstens n Blöcke enthalten, ist die Summe endlich:

$$p_G(k) = \sum_{r=\chi(G)}^n q_r(G)(k)_r.$$

Dann ist $p_G(k)$ aber eine endliche Summe von Polynomen vom Grad kleiner gleich n . □

Definition 13.3. Die Funktion $p_G(x)$ heißt das *chromatische Polynom* von G .

Example 13.4. Sei $G = C_4$. Es gilt $q_1 = 0$, weil $\chi = 2$. Für q_2 ergibt sich nur eine Möglichkeit. In drei unabhängige Mengen kann der 4-Kreis durch 2 Möglichkeiten geteilt werden, d.h. $q_3 = 2$. Und q_4 ist natürlich 1.

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} p_{C_4}(x) &= 1x(x-1) + 2x(x-1)(x-2) + 1x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= x(x-1)(x^2 - 3x + 3). \end{aligned}$$

Alternative Berechnungsidee: Evaluiere vier Werte, z.B. $p_{C_4}(0)$, $p_{C_4}(1)$, $p_{C_4}(2)$ und $p_{C_4}(3)$. Berechne p_{C_4} als interpolierendes Polynom dieser vier Stützstellen. Für die Werte erhalten wir: $p_{C_4}(0) = p_{C_4}(1) = 0$, $p_{C_4}(2) = 2$ und

$$p_{C_4}(3) = \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{Färbungen, die alle 3 Farben benutzen}} + \underbrace{3 \cdot 2}_{\text{nur 2 Farben werden benutzt}} = 18.$$

Sei wieder für G und $e \in E$:

- $G \setminus e$ Löschen von e aus G
- G/e Kontrahieren von e aus G .

Proposition 13.5. Es gilt:

$$p_G(k) = p_{G \setminus e}(k) - p_{G/e}(k).$$

Beweis. Wandle die Formel um in

$$p_{G \setminus e}(k) = p_G(k) + p_{G/e}(k).$$

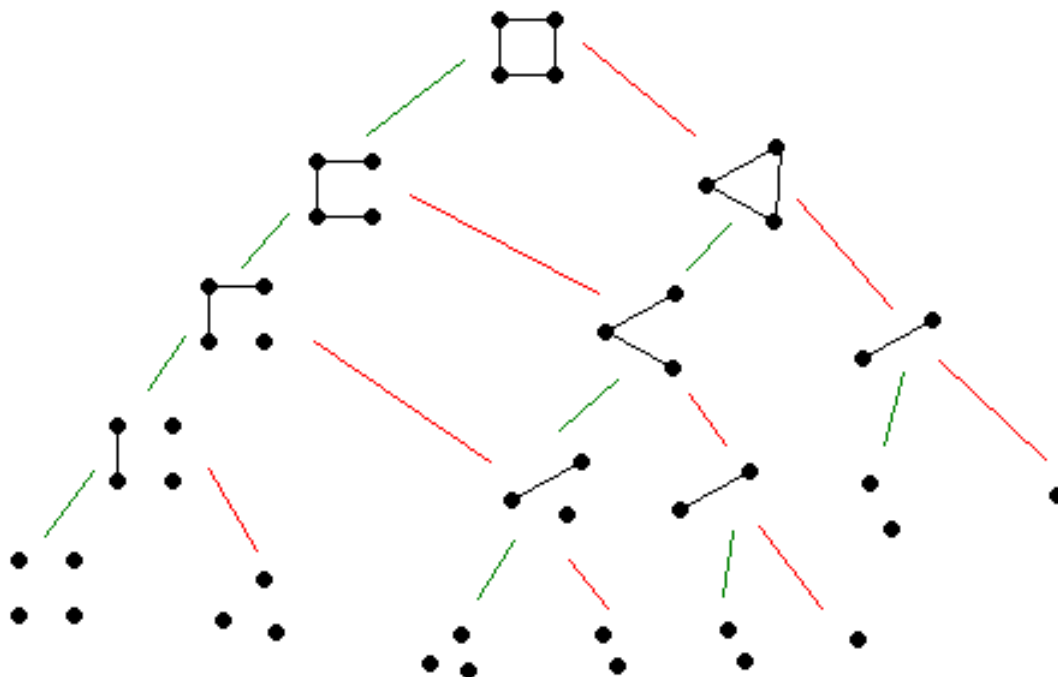


ABBILDUNG 121. Bei den einzelnen Knoten angefangen, kann so von unten nach oben das chromatische Polynom berechnet werden (Übung: der 4-Kreis hat das chromatische Polynom $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x$)

$p_{G \setminus e}(k)$ stellt alle k Färbungen von $G \setminus e$ dar. Sei f eine zulässige Färbung von $p_{G \setminus e}(k)$. Falls $f(x) \neq f(y)$, ist f eine Färbung von G . Falls $f(x) = f(y)$, ist f eine Färbung von G/e . Wir erhalten also eine Bijektion. \square

Dies liefert eine weitere Methode zur Berechnung von $p_G(x)$:

Example 13.6. Betrachte wieder das chromatische Polynom vom C_4 . Wähle eine Kante und bilde zwei neue Graphen: 1. durch löschen, 2. durch kontrahieren. Wiederhole dieses mit jedem neuen Graphen, bis keine Kanten mehr übrig bleiben.

Note 13.7. Das chromatische Polynom von G zu berechnen ist schwer ($\#P$ -vollständig). Die Berechnung von $\chi(G)$ ist ebenfalls schwer, und da man aus $p_G(x)$ durch Auswertung $\chi(G)$ bestimmen kann, muss $p_G(x)$ zu berechnen mindestens so schwer sein, wie $\chi(G)$ zu berechnen.

Theorem 13.8. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

$$p_G(x) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} x^{k(G_S)}$$

mit $k(G_S) = \#$ Komponenten von $G_S = (V, S)$

(Beweis folgt nach Beispiel und Lemma.)



Example 13.9. Betrachte die Menge S des 4-Kreises. Die Kanten aus S sind Kontrahierkanten und Kanten in $E \setminus S$ sind Löschkanten. Dann bekommen wir einen Weg im Auswertungsbaum von $p_G(x)$ bezüglich der Rekursion zu einem Blatt.

Lemma 13.10. Die Rekursion $p_G(x) = p_{G \setminus e}(x) - p_{G/e}(x)$ gilt auch für Graphen mit Multikanten und Schleifen.

Beweis. Wenn G eine Schleife e enthält, dann gilt $G \setminus e = G/e$ und somit $p_G(x) = 0$. Tatsächlich hat G in diesem Fall keine zulässige Färbung.

Wenn G eine Doppelkante e und e' enthält, dann gilt

$$p_G(k) = p_{G \setminus e}(k) \forall k.$$

Also erhält man mit

$$p_G(x) = p_{G \setminus e}(x) - p_{G/e}(x),$$

dass $p_{G/e} = 0$. Dies ist tatsächlich so, da G/e eine Schleife enthält. □

Mit diesem Lemma können wir die Kontraktion in der Rekursion im Sinne von Multigraphen machen.

Beweis. (Beweis des Satzes oben)

Blätter im vollständigen Rekursionsbaum entsprechen gerade Partitionen (A, S) von E , wobei A die gelöschten Kanten und S die kontrahierten Kanten darstellen. Das Blatt zur Partition (A, S) genau dann ein Graph mit k isolierten Knoten, wenn $G_S = (V, S)$ k Komponenten hat. Das chromatische Polynom des Blattes ist x^k , sein Beitrag in der Wurzel ist $(-1)^{|S|}x^k$. □

13.1. Azyklische Orientierungen. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Orientierung weist jeder Kante $\{x, y\}$ von G eine Richtung, z.B. (x, y) zu. Dies symbolisieren wir in der Zeichnung durch einen Pfeil von x nach y . Eine Orientierung ist *azyklisch*, wenn sie keine gerichteten Kreise besitzt.

Im folgenden interessiert uns das Zählen von azyklischen Orientierungen.

Example 13.11. Sei $G = C_4$. Insgesamt haben wir 16 Orientierungen, wovon 14 azyklisch sind.

Theorem 13.12 (Standley). Sei $A(G)$ die Anzahl der azyklischen Orientierungen von G . Es gilt:

$$A(G) = (-1)^n p_G(-1).$$

Beweis. Induktion nach der Kantenzahl:

IA: $|E| = 0$, also $E = \emptyset$. Dann gibt es nur eine azyklische Orientierung, also $A(G) = 1$. Für $p_G(x)$ erhalten wir $p_G(x) = x^n$ und an der Stelle -1 ausgewertet erhalten wir $(-1)^n p_G(-1) = (-1)^n (-1)^n = 1$.

$|E| = 1$. Dann erhalten wir $A(G) = 2$, weil wir die Kante beliebig orientieren können. Für $p_G(x)$ erhalten wir $p_G(x) = x^{n-1}(x-1)$ und an der Stelle -1 ausgewertet erhalten wir $(-1)^n p_G(-1) = (-1)^n (-1)^{n-1} (-2) = 2$.

Für den Induktionsschritt benutzen wir

$$A(G) = A(G \setminus e) + A(G/e).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A(G) &= (-1)^n p_{G \setminus e}(-1) + (-1)^{n-1} p_{G/e}(-1) \\ &= (-1)^n [p_{G \setminus e}(-1) - p_{G/e}(-1)] \\ &= (-1)^n p_G(-1). \end{aligned}$$

Es bleibt noch, obige Rekursion zu zeigen.

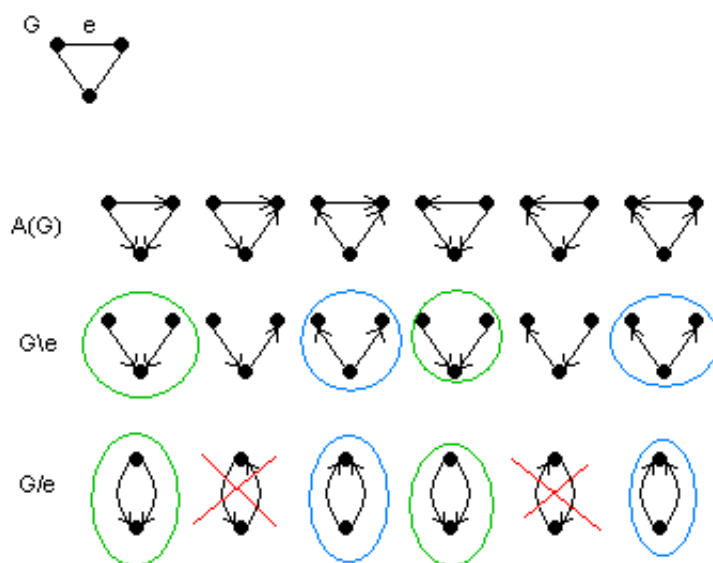


ABBILDUNG 122. G hat 6 azyklische Orientierungen. Betrachte Kontrahieren und Löschen der Kante e .

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
f_1	×	×			
f_2		×	×		
f_3			×	×	
f_4				×	×
f_5	×				×

ABBILDUNG 123. Zugehörigkeitstabelle

Ist \vec{E} eine azyklische Orientierung von G , dann ist $\vec{E} \setminus e$ eine azyklische Orientierung von $G \setminus e$.

Wenn die Endpunkte x, y von e in $\vec{E} \setminus e$ durch einen gerichteten Weg verbunden sind, dann ist die Orientierung von e in \vec{E} durch $\vec{E} \setminus e$ eindeutig festgelegt.

Wenn die Endpunkte von x, y von e in $\vec{E} \setminus e$ durch keinen gerichteten Weg verbunden sind, dann gibt es zwei Urbilder \vec{E} und \vec{E}' von $\vec{E} \setminus e$. Genau in diesem Fall ist \vec{E}/e azyklisch. \square

Example 13.13.

13.2. Fraktionale Färbungen. Motivation: Wir haben 5 Funktionäre, 5 Ausschüsse und eine Zugehörigkeitstabelle, die angibt, welcher Funktionär in welchem Ausschuss ist.

Vorgabe: Vor der Plenarsitzung müssen alle Ausschüsse eine Stunde tagen. Wie viel Zeit ist dafür nötig?

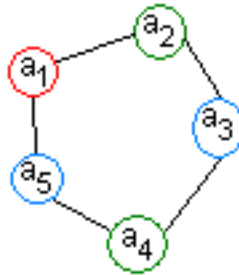


ABBILDUNG 124. Zugehörigkeit im Graphen dargestellt

14:00	a ₁	a ₃
14:30		
15:00	a ₅	
15:30		a ₂
16:00	a ₄	a ₁
16:30		

ABBILDUNG 125. Ein Plan mit $\chi_f(C_5) = 2,5$

Ausschüsse die gleichzeitig tagen können, sind unabhängige Mengen. Wir brauchen also eine Färbung der unabhängigen Mengen. Wenn jeder Ausschuss eine zusammenhängende Stunde tagt, sind drei Stunden nötig

$$\chi(G) = 3.$$

Effizienter können wir den Plan gestalten, wenn Sitzungen unterbrochen werden dürfen. Dann brauchen wir nur 2,5 Stunden.

Definition 13.14. Eine zulässige b -Färbung von $G = (V, E)$ mit Farben aus einer Menge A ist eine Abbildung $c : V \rightarrow \binom{A}{b}$ und $\forall \{x, y\} \in E$ gilt $c(x) \cap c(y) = \emptyset$. Die b -chromatische Zahl von G ist

$$\chi_b(G) = \min\{a \mid \exists b\text{-Färbung mit Farben aus } A \text{ und } |A| = a\}.$$

Note 13.15. Folgendes ergibt sich sofort:

- $\chi(G) = \chi_1(G)$
- $\chi_{b_1+b_2}(G) \leq \chi_{b_1}(G) + \chi_{b_2}(G)$ (Subadditivität). Seien $c_i : V \rightarrow \binom{A_i}{b_i}$ für $i = 1, 2$ zulässig mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann ist $c : V \rightarrow \binom{A_1 \cup A_2}{b_1+b_2}$ mit $c(x) = c_1(x) \cup c_2(x)$ eine $(b_1 + b_2)$ -Färbung mit $|A_1| + |A_2|$ Farben.

Definition 13.16. Die *fraktionale chromatische Zahl* ist definiert als

$$\chi_f(G) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\chi_b(G)}{b}.$$

Man kann zeigen, dass die Subadditivität die Existenz des Limes impliziert. Außerdem gilt $r \in \mathbb{N} : \frac{\chi_r}{r} \leq \chi_1$. Dann ist

$$\frac{\chi_r}{r} \leq \frac{\chi_1 + \chi_1 + \dots + \chi_1}{r} = \frac{r\chi_1}{r} = \chi_1.$$

Es gilt also $\chi_f \leq \chi$.

Example 13.17. Der ungerade Kreis C_{2k+1} hat Unabhängigkeitszahl k . Sei $V = \{0, 1, \dots, 2k\}$ und $I_0 = \{0, 2, \dots, 2k - 2\}$. Für I_i definieren wir

$$I_i = I_0 + i = \{i, i + 2, i + 4, \dots, i + 2k - 2\} \text{ mod } (2k + 1).$$

Die Familie I_0, \dots, I_{2k} besteht aus $2k + 1$ unabhängigen Mengen. Jedes $x \in V$ kommt in k dieser Mengen vor. Jeder unabhängigen Menge ordnen wir eine Farbe zu. Wir erhalten also eine k -Färbung mit $2k + 1$ Farben. Es gilt also:

$$\chi_f \leq \frac{\chi_k}{k} \leq \frac{2k + 1}{k} = 2 + \frac{1}{k}.$$

13.3. Untere Schranken. Für die chromatische Zahl χ hatten wir als untere Schranke $\chi \geq \frac{n}{\alpha}$ bzw. $\chi \geq \omega$. Was gilt nun für χ_f ?

- $\chi_b \cdot \alpha \geq n \cdot b$, also $\frac{\chi_b}{b} \geq \frac{n}{\alpha}$ und damit $\chi_f \geq \frac{n}{\alpha}$.

Conclusion 13.18. Für ungerade Kreise C_{2k+1} erhalten wir

$$\chi_f(C_{2k+1}) \geq \frac{2k + 1}{k} = 2 + \frac{1}{k}.$$

Zusammen mit der oberen Schranke gilt dann sofort

$$\chi_f(C_{2k+1}) = 2 + \frac{1}{k}.$$

- $\chi_b \geq b \cdot \omega$, also gilt $\frac{\chi_b}{b} \geq \omega$ und somit $\chi_f \geq \omega$.

Note 13.19. Für perfekte Graphen gilt $\chi = \omega$. Da immer gilt $\chi \geq \chi_f \geq \omega$, ist für perfekte Graphen also $\chi_f = \chi$.

Definition 13.20. Eine b -Clique ist eine Abbildung $\omega : V \rightarrow \mathbb{N}$ (Multimenge), so dass für jede unabhängige Menge I gilt:

$$\sum_{x \in I} \omega(x) \leq b.$$

Mit ω_b bezeichnen wir

$$\omega_b = \max\left(\sum_{x \in V} \omega(x) \mid \omega : V \rightarrow \mathbb{N} \text{ ist } b\text{-Clique}\right)$$

Note 13.21. Wie bei χ erhalten wir leicht die ersten Folgerungen:

- $\omega = \omega_1$
- $\omega_{b_1+b_2} \geq \omega_{b_1} + \omega_{b_2}$. Daraus folgt $\omega_f(G) := \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\omega_b}{b}$, die fraktionale Cliquenzahl, existiert.

Proposition 13.22. Für alle b gilt $\omega_b \leq \chi_b$. Daraus folgt

$$\omega_f = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\omega_b}{b} \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\chi_b}{b} = \chi_f.$$

Beweis. Sei $\chi_b = a$ und I_1, \dots, I_a die Farbklassen einer optimalen b -Färbung. Sei ω eine maximale b -Clique, dann folgt

$$\omega(I_j) := \sum_{x \in I_j} \omega(x) \leq b$$

für $j = 1, \dots, a$. Also gilt

$$\begin{aligned} \chi_b \cdot b &= a \cdot b \\ &\geq \sum_{j=1}^a \omega(I_j) \\ &= \sum_{j=1}^a \sum_{x \in I_j} \omega(x) \\ &= \sum_{x \in V} b\omega(x) \\ &= b\omega_b \end{aligned}$$

und damit $\chi_b \geq \omega_b$. □

Wir haben also

$$\omega \leq \omega_f \underbrace{=}^* \chi_f \leq \chi,$$

wobei $*$ aus der LP-Dualität folgt.

Example 13.23. Betrachten wir die fraktionale Cliquenzahl von ungeraden Kreisen C_{2k+1} . Sei $\omega : V \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\omega(x) = 1 \forall x$. Dann gilt

$$\sum_{x \in I} \omega(x) \leq \alpha = k$$

d.h. wir haben eine k -Clique vom Gewicht $2k + 1$. Somit haben wir

$$\frac{\omega_k}{k} \geq \frac{2k + 1}{k} = 2 + \frac{1}{k}.$$

Allgemein gilt

$$\frac{n}{\alpha} \leq \frac{\omega_\alpha}{\alpha} \leq \omega_f.$$

13.4. LP-Formulierung. Sei G ein Graph, M eine Matrix, deren Zeilen durch Knoten von G und deren Spalten durch unabhängige Mengen induziert werden. Es gilt also:

$$M_{v,I} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } v \in I \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Das Problem, eine chromatische Zahl zu ermitteln, kann man jetzt in ein ganzzahliges 0-1-Optimierungsproblem umwandeln. Dabei erhalten wir folgendes Programm:

$$\begin{aligned} \chi &= \min \langle x, \mathbb{I}_I \rangle \\ M \cdot x &\geq \mathbb{I}_v \\ x &\in \{0, 1\}^I \end{aligned}$$

Das dazugehörige duale Programm, das uns die maximale Cliquengröße liefert, lautet:

$$\begin{aligned} \omega &= \max \langle y, \mathbb{I}_v \rangle \\ M^T y &\leq \mathbb{I}_I \\ y &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Die LP-Relaxierung des 0-1-Programms hat dann die primale Form

$$\begin{aligned} \min \langle x, \mathbb{I}_I \rangle &=: \chi_f^* \\ M \cdot x &\geq \mathbb{I}_v \\ x &\in [0, 1] \end{aligned}$$

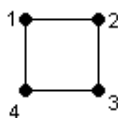


ABBILDUNG 126. Bezifferter C_4

Und das Dual sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \max \langle y, \mathbb{I}_v \rangle &=: \omega_f^* \\ M^T y &\leq \mathbb{I}_I \\ y &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Es gilt

$$\chi \geq \chi_f^* = \omega_f^* \geq \omega.$$

Kurze Begründung: Sind x, y zulässige Lösungen, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle y, \mathbb{I}_v \rangle &= y^T \mathbb{I}_v \\ &\leq y^T (Mx) \\ &= (y^T M)x \\ &= (M^T y)^T x \\ &\leq \mathbb{I}_I x \\ &= \langle x, \mathbb{I}_v \rangle. \end{aligned}$$

Also auch $\omega_f^* \leq \chi_f^*$.

Theorem 13.24. *Es gilt*

$$\chi_f^* = \chi_f \text{ und } \omega_f^* = \omega_f.$$

Beweis. Wir zeigen, $\omega_f = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\omega_b}{b} = \omega_f^*$.

Sei ω optimale b -Clique. Dann ist der Vektor $y = \frac{\omega}{b}$ eine zulässige Lösung im Cliques-LP. Der Zielfunktionswert ist $\frac{\omega_b}{b}$, also ist $\omega_f^* \geq \frac{\omega_b}{b}$ für alle b und somit $\omega_f^* \geq \omega_f$.

Sei umgekehrt y eine optimale Lösung des LP. Dann ist y rational, weil das LP nur rationale Koeffizienten besitzt. Also existiert ein m , so das $m \cdot y$ ganzzahlig ist. Dieses $m \cdot y$ ist eine m -Clique vom Gewicht $m \cdot \omega_f^*$ und daraus folgt $\omega_f \geq \frac{\omega_m}{m} \geq \omega_f^*$. \square

13.5. Färbungen und Homomorphismen. Seien $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ zwei Graphen. Eine Abbildung $\Phi : V \rightarrow W$ ist ein *Homomorphismus*, wenn für alle Kanten $\{x, y\} \in E$ gilt, dass $(\Phi(x), \Phi(y)) \in F$, d.h. die Kanten von G werden auf die Kanten von H abgebildet.

Proposition 13.25. *Sei G ein Graph. Dann ist $\chi(G)$ genau dann kleiner als t , wenn es einen Homomorphismus von G nach K_t gibt.*

13.6. Verallgemeinerung von Färbungen. Sei H ein fester Graph. Wir sagen G ist H -färbbar, wenn ein Homomorphismus von G nach H existiert.

Example 13.26.

- (1) Betrachte den Graphen $H = C_4$.

Dann können wir folgende Relationskette aufstellen: Es gibt einen Homomorphismus $G \rightarrow H \Leftrightarrow$ es gibt eine Färbung von G mit 1,2,3,4 ohne 2-4- und 1-3-Kanten $\Leftrightarrow G$ ist bipartit.

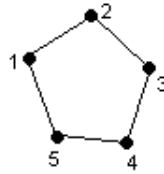


ABBILDUNG 127. Bezifferter C_5

(2) Sei $H = C_5$.

Sei $\psi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus und $\varphi : H \rightarrow K_3$ der Homomorphismus, der C_5 auf K_3 abbildet. Dann ist $\varphi \circ \psi : G \rightarrow K_3$ ein Homomorphismus, der G auf K_3 abbildet. Der Graph ist also 3-färbbar. Allerdings gibt es keinen Homomorphismus, der K_3 auf C_5 abbildet.

Allgemein stellt sich die Frage, ob es einen Kneser-Graphen K_b^t gibt, so dass $\chi_b(G) \leq t \Leftrightarrow \exists$ ein Homomorphismus von G auf den K_b^t .

14. KNESER-GRAPHEN

Der Graph K_b^t hat $\binom{t}{b}$ als Knoten und eine Kante (B, B') existiert, wenn $B \cap B' = \emptyset$.

Proposition 14.1. *Es gilt*

$$\chi_b(G) \leq t \Leftrightarrow \exists \text{ Hom. } G \rightarrow K_b^t.$$

Example 14.2. Zum Kneser-Graphen:

- $K_1^t = K^t$
- K_t^{2t} Matching auf $\binom{2t}{t}$ Knoten, also ungefähr $\frac{1}{2\sqrt{t}} 2^{2t}$
- K_2^5 Petersen-Graph
- K_t^{2t-1} keine Kanten

Beim Kneser-Graphen gilt $\chi_f \ll \chi$. Diese Eigenschaft haben nur sehr wenige Graphen.

Theorem 14.3 (Lovász). *Sei K_b^t ein Kneser-Graph. Dann gilt*

$$\chi(K_b^t) = t - 2b + 2.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir nur $\chi(K_b^t) \leq t - 2b + 2$.

Wenn zwei Mengen B, B' ein Element x gemeinsam haben, dann ist x eine geeignete Farbe für B und B' in einer $[t]$ -Färbung $T = \{1, 2, \dots, t\}$ und $A = \{1, 2, \dots, 2b - 1\}$. Wir färben K_b^t mit $T \setminus A \cup \{1\}$. Sei $B \in \binom{[t]}{b}$. Wenn $B \subseteq A$ dann ist $\text{Farbe}(B) = 1$. Wenn $B \not\subseteq A$, dann gibt es ein $x \in B \cap (T \setminus A)$. Wähle so ein x und setze $\text{Farbe}(B) = x$. Dann gilt

$$|T \setminus A \cup \{1\}| = t - (2b - 1) + 1 = t - 2b + 2.$$

Die Rückrichtung wird später bewiesen. □

14.1. Die fraktionale chromatische Zahl von K_b^t .

Definition 14.4. Sei Z_b^t der Graph mit den Knoten $0, 1, \dots, t - 1$. Die Nachbarn von i sind $\{i + b, i + b + 1, \dots, i + t - b\} \text{ mod } t$. Der Knoten i hat $t - 2b + 1$ Nachbarn.

Example 14.5. Für $t = 5$ und $b = 2$ erhalten wir
und für $t = 7$ und $b = 2$

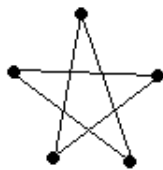


ABBILDUNG 128. K_5 ohne "äußeren" 5-Kreis

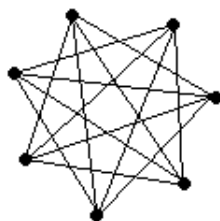


ABBILDUNG 129. K_7 ohne "äußeren" 7-Kreis

Proposition 14.6. Für Z_b^t gilt $\chi_b(Z_b^t) = t$ und $\omega_b(Z_b^t) = t$. Also gilt

$$\chi_f(Z_b^t) = \frac{t}{b}.$$

Beweis. Betrachte $U_0 = \{0, 1, \dots, b-1\}$. Diese Knoten sind sicher unabhängig voneinander, da der Abstand benachbarter Knoten mindestens b ist. Sei $U_i := U_0 + i$. Die Menge U_0, \dots, U_{t-1} liefert b -Färbungen mit t Farben. Also ist $\chi_b \leq t$. Die Menge U_0 ist eine maximal unabhängige Menge ($\alpha = b$). Deshalb gilt

$$\frac{t}{\alpha} = \frac{t}{b} = \frac{\chi_b}{b} \geq \chi_f = \omega_f \geq \frac{\omega_b}{b} \geq \frac{t}{b}.$$

Die Abbildung $\omega(x) = 1$ für alle x ist eine α -Clique. In unserem Fall also eine b -Clique mit Gewicht t . □

Theorem 14.7. Es gilt

$$\chi_f(K_b^t) = \frac{t}{b}.$$

Beweis. Die Ungleichung $\chi_f(K_b^t) \leq \frac{t}{b}$ wird durch die triviale b -Färbung von K_b^t gezeigt. Damit ist $\chi_b(K_b^t) \leq t$.

Betrachte jetzt die andere Richtung. Der Graph Z_b^t besitzt eine b -Färbung mit t Farben. Also gibt es einen Homomorphismus $\phi : Z_b^t \rightarrow K_b^t$. Für jeden Homomorphismus $\psi : K_b^t \rightarrow K_a^s$ ist auch $\psi \circ \phi : Z_b^t \rightarrow K_a^s$ ein Homomorphismus. D.h. $\chi_a(Z_b^t) \leq s$. Daraus folgt $\frac{t}{b} = \chi_f(Z_b^t) \leq \frac{\chi_a(Z_b^t)}{a} \leq \frac{s}{a}$. Damit erhalten wir $\chi_f(K_b^t) = \frac{t}{b}$, denn $\chi(K_b^t) \geq s \geq \frac{ta}{b}$ für alle a und somit

$$\frac{\chi_a}{a} \geq \frac{t}{b}.$$

□

Eine Folgerung daraus ist der Satz von Erdős Ko Rado.

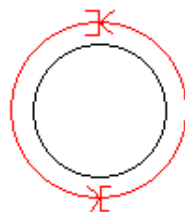


ABBILDUNG 130. Mit halboffenen Intervallen funktioniert es nicht

Theorem 14.8 (Erdős Ko Rado). Für b, t mit $t \geq 2b$ gilt: jede intersecting family von b -Teilmengen von $[t]$ hat Kardinalität $\leq \binom{t-1}{b-1}$. Also:

$$\alpha(K_b^t) = \binom{t-1}{b-1}.$$

Beweis. Wir zeigen, als erstes: aus EKR folgt $\chi_f(K_b^t) = \frac{t}{b}$. Wir hatten $\chi_f \leq \frac{t}{b}$ über die triviale Färbung erhalten. Es gilt: $\frac{n}{\alpha} \leq \omega_f = \chi_f$. Nach ERK gilt $\alpha \leq \binom{t-1}{b-1}$ und somit erhalten wir

$$\frac{\binom{t}{b}}{\binom{t-1}{b-1}} = \frac{t}{b} \leq \chi_f.$$

Für die Rückrichtung sei $F = (B_1, \dots, B_\gamma)$ mit $B_i \subset [t]$ und $|B_i| = b$ eine intersecting family. Betrachte F^π für alle $t!$ Permutationen. Dies ergibt eine Multifärbung von K_b^t mit $t!$ Farben.

Es stellt sich die Frage, wie viele Farben B bekommt. Wähle ein $i \in 1, \dots, \gamma$, eine bijektive Abbildung $\rho : B_i \rightarrow B$ und eine bijektive Abbildung $\tau : T \setminus B_i \rightarrow T \setminus B$. Das liefert ein π mit $B_i^\pi = B$, d.h. B wird $p = \gamma b!(t-b)!$ -fach überdeckt. Es gilt also

$$\frac{t!}{\gamma b!(t-b)!} \geq \frac{\chi_p(K_b^t)}{p} \geq \chi_f(K_b^t) = \frac{t}{b}$$

und somit $\gamma \leq \frac{b}{t} \binom{t}{b} = \binom{t-1}{b-1}$. □

14.2. Die chromatische Zahl von Kneser-Graphen. Der Kneser-Graph K_b^t hat die Knoten $\binom{[t]}{b}$ und die Kante B, B' , wenn $B \cap B' = \emptyset$. Das Standardbeispiel ist der Petersen-Graph als K_2^5 . Wir haben gesehen, dass $\chi(K_b^t) \leq t - 2b + 2$ ist. Weiter hatten wir, dass $\chi_f(K_b^t) = \frac{t}{b}$ ist.

Theorem 14.9 (Lovász). Eine untere Schranke für die chromatische Zahl des Kneser-Graphen K_b^t ist

$$\chi(K_b^t) \geq t - 2b + 2.$$

Wir benutzen einen topologischen Satz aus der Borsuk-Ulam Familie.

Theorem 14.10 (Lyusternik Shniveľman). Wenn die d -dimensionale Sphäre S^d von $d+1$ Mengen A_1, \dots, A_{d+1} überdeckt ist und jedes A_i ist entweder offen oder abgeschlossen, dann gibt es ein i , so dass A_i ein Paar antipodaler Punkte enthält.

Betrachten wir einige Beispiele zu diesem Satz.

Example 14.11. Betrachte als erstes S_1 . Wenn wir die Bedingung an die A_i (entweder geschlossen oder offen), dann ist die Aussage falsch.

Auch wenn wir die Anzahl der Mengen erhöhen, gilt die Aussage des Satzes nicht mehr.

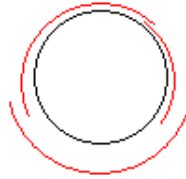


ABBILDUNG 131. Drei sind hier zuviel...

Satz von Lovász. Sei $d = t - 2b + 1$ und X eine Menge von t Punkten auf S^d , so dass keine Hyperebene durch 0 (Äquator) mehr als d Punkte enthält. Wir können uns vorstellen, dass S^d im Raum \mathbb{R}^{d+1} lebt. Eine Hyperebene dort wird durch $d + 1$ Punkte bestimmt. Also können wir nicht vermeiden, dass eine Hyperebene durch den Äquator d Punkte enthält, aber wir können dafür sorgen, dass sie nicht mehr enthält. Wir betrachten die Knoten von K_b^t als b -Teilmengen von X .

Angenommen es existiert eine Färbung farb von K_b^t mit d Farben. (Ziel: Widerspruch!) Wir definieren Teilmengen A_1, \dots, A_d von S^d durch

$$A_i := \{p \in S^d \mid \exists F \in \binom{X}{b} \text{ mit } \text{farb}(F) = i \text{ und } \forall x \in F \text{ gilt } \langle p, x \rangle > 0\}$$

d.h. $p \in A_i \Leftrightarrow$ die Hemisphäre mit Zentrum p enthält alle Punkte einer i - gefärbten Menge F . Wir können auch sagen

$$A_i = \cup_{F: \text{farb}(F)=i} (\cap_{x \in F} H_x).$$

Wichtig ist, dass jedes A_i offen ist. Da wir nur d Farben haben, definieren wir uns noch ein A_{d+1} durch

$$A_{d+1} := S^d \setminus (\cup_i A_i).$$

Die Menge A_{d+1} besteht also aus den restlichen Punkten auf S^d und ist abgeschlossen. Nach Satz 14.10 gibt es ein j , so dass A_j ein Paar antipodaler Punkte enthält.

1. Fall: $j \leq d$ und $p, -p \in A_j$. Dann gibt es ein F mit $\text{farb}(F) = i$ und $\langle p, x \rangle > 0$ für alle $x \in F$ und es gibt ein F' mit $\text{farb}(F') = i$ und $\langle -p, y \rangle > 0$ bzw. $\langle p, y \rangle < 0$ für alle $y \in F'$. Also sind F und F' disjunkt. Das ist ein Widerspruch zur Zulässigkeit der Färbung. (Disjunkte Mengen sind Mengen, die in einem Kneser-Graphen verbunden sind. Also können wir den beiden Mengen nicht die gleiche Farbe geben). Also müssen in A_{d+1} die antipodalen Punkte enthalten sein.

2. Fall: $i = d + 1$ und $p, -p \in A_{d+1}$. Dann ist p in keinem A_i mit $i \leq d$ nach Definition und daraus folgt, in der Menge $\{x \mid \langle p, x \rangle > 0\}$ gibt es keine b Elemente aus X : Angenommen $H_p = |\{x \mid \langle p, x \rangle > 0\}| > b$. Sei $B \subseteq H_p \cap X$ mit $|B| = b$. Die Menge B ist ein Knoten von K_b^t und hat die Farbe j mit $j \leq d$. Daraus folgt $p \in \cap_{x \in B} H_x$, also $p \in A_j$ ist. Aber das ist ein Widerspruch dazu, dass $p \in A_{d+1}$ ist. Das gleiche Ergebnis erhält man für $-p$. Also enthält auch H_{-p} weniger als b Elemente aus X . Daraus folgt, dass der Äquator $\{x \mid \langle x, p \rangle = 0\}$ mindestens $|X| - 2(b - 1) = t - 2b + 2 = d + 1$ Punkte enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von X , weil die Hyperebene $\langle p, x \rangle = 0$ zu viele Punkte enthält. \square

15. PERFEKTE GRAPHEN

Als wichtige Parameter für Graphen haben wir:

- χ minimale Überdeckung mit unabhängigen Mengen
- ω maximale Cliquengröße

κ minimale Überdeckung mit Cliquen
 α maximale Größe einer unabhängige Menge

Es gelten die folgenden Relationen:

$$\chi \geq \omega$$

und

$$\kappa \geq \alpha.$$

Definition 15.1. Ein Graph ist *perfekt* (ω -perfekt), wenn $\chi(H) = \omega(H)$ für jeden induzierten Subgraphen H von G .

Analog ergibt sich die Definition von α -perfekt.

Der französische Mathematiker Berge hatte Anfang der 60er Jahre zwei Vermutungen

1. Vermutung: Ein Graph ist genau dann perfekt, wenn sein Komplement perfekt ist.

Wenn wir einen Graphen haben, der ω -perfekt ist, dann ist sein Komplement α -perfekt. Also ist die Aussage äquivalent zu: Ein Graph G ist genau dann ω -perfekt, wenn er α -perfekt ist.

Diese Vermutung wurde 1972 von Lovász bewiesen und läuft jetzt unter dem Namen Perfect Graph Theorem (PGT).

2. Vermutung: Ein Graph G ist genau dann perfekt, wenn sowohl G als auch \bar{G} keinen induzierten ungeraden Kreis enthalten. Häufig wird dies als “ G enthält kein odd hole und kein odd antihole” formuliert.

Die zweite Vermutung ist stärker als die erste. Sie wurde von Robertson, Seymour und Thomas 2002 bewiesen.

15.1. Klassen perfekter Graphen. Ein ungerader Kreis der Länge größer gleich fünf kann niemals perfekt sein, denn es gilt: $\chi = 3$ und $\omega = 2$. Für die Komplemente ungerader Kreise gilt $\alpha(C_{2n+1}) = n$ und $\kappa(C_{2n+1}) = n + 1$. Wenn wir auf ungerade Kreise verzichten müssen, wären bipartite Graphen vielleicht ein guter Kandidat:

- (1) **Bipartite Graphen:** Wenn G bipartit ist, dann ist $\chi(G) = 2$ und die Cliquengröße $\omega(G) = 2$. Auch die induzierten Untergraphen sind wieder bipartit, also ist diese Graphenklasse perfekt.
- (2) **Komplemente von bipartiten Graphen:** Die erste Berge-Vermutung besagt, dass auch diese Graphen perfekt sind. Aber wir können es auch direkt zeigen: Sei G bipartit. Es gilt $\chi(\bar{G}) = \kappa(G)$. Wir suchen also eine minimale Überdeckung von G mit Kanten und Singeltons. Es gilt

$$\kappa(G) = |V| - |M|$$

wobei M ein maximales Matsching ist. Betrachten wir nun $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$. Wir betrachten also eine maximal unabhängige Menge von G . Dafür muss gelten

$$\alpha(G) = |V| - |U|,$$

wobei U eine minimale Knotenüberdeckung ist.

Theorem 15.2 (König-Egervary). *Wenn G ist bipartit genau dann, wenn $\max(|M| : M \text{ Matching}) = \min(|U| : U \text{ Knotenüberdeckung})$.*

Dies folgt mit PGT aus (1.)

- (3) **Vergleichbarkeitsgraphen:** Sei P eine Ordnung. (Eine Ordnung ist eine Menge X ist mit $<$ -Relation, die transitiv und irreflexiv ist.) Eine solche Ordnung kann durch einen Diagramm dargestellt werden. Jede Kante hat “oben” und “unten”, und es gilt $a < b$, wenn es einen Weg von a nach b gibt, der alle Kanten von unten nach oben benutzt. Der Vergleichbarkeitsgraph



ABBILDUNG 132. Wie man sich hier leicht überzeuge, stimmt die Gleichung

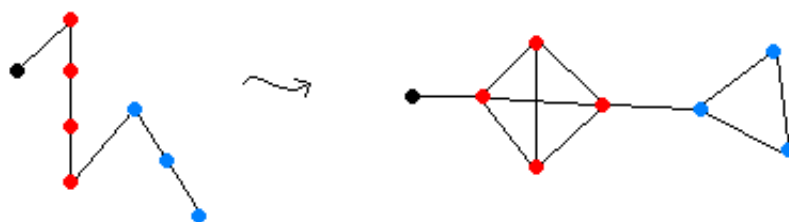


ABBILDUNG 133. Kette wird zu Clique

hat Knoten X und eine Kante $\{a, b\}$, wenn gilt $a < b$ oder $b > a$.

Sei G_p ein Vergleichbarkeitsgraph zur Ordnung P . Dann ist $\omega(G_p) = \max\{|C| : C \text{ Kette in } P\}$, wobei eine Kette von paarweise vergleichbaren Elementen gebildet wird. $\chi(G_p)$ entspricht einer minimalen Zerlegung von P in Antiketten.

Proposition 15.3. Für jede Ordnung P gilt:

$$\max\{|C|, C \text{ Kette in } P\} = \min \# \text{Antiketten in Antikettenzerlegung von } P$$

Beweis. “ \leq ” ist offensichtlich: jede Antikette kann nur ein Element aus einer Kette enthalten. “ \geq ” zeigt man, indem man eine optimale Antikettenzerlegung angibt. Sei $A_1 = \min P$ und $P_1 = P \setminus A_1$. Verfahre mit dem Restgraphen ebenso: $A_i = \min P_{i-1}$ und $P_i = P_{i-1} \setminus A_i$. Diese Zerlegung ist optimal: betrachte ein Element aus der letzten Menge A_n . Es muss ein Element aus A_{n-1} geben, das vor dem ausgewählten Element aus A_n liegt... Damit erhält man eine Kette, deren Länge der Anzahl von Antiketten in der Antikettenzerlegung entspricht. \square

- (4) **Unvergleichbarkeitsgraphen:** Sei P eine Ordnung. Der Unvergleichbarkeitsgraph von P ist das Komplement des Vergleichbarkeitsgraphen und wird mit \overline{G}_p bezeichnet. \overline{G}_p ist nach dem PGT natürlich auch perfekt und man erhält mit der vorherigen Proposition zu Vergleichbarkeitsgraphen den Satz von Dilworth:

Theorem 15.4 (Dilworth). Die minimale Anzahl von Ketten in einer Kettenzerlegung ist gleich der maximalen Anzahl von Elementen in einer Antikette.

- (5) **Line-Graphen bipartiter Graphen:**

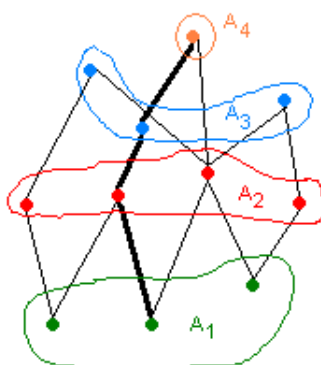


ABBILDUNG 134. Konstruktion der Antiketten

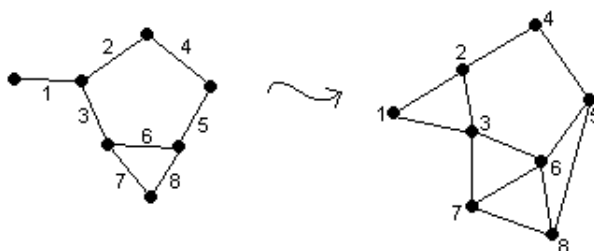


ABBILDUNG 135. Ein Graph und der dazugehörige Line-Graph

Definition 15.5. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der Line-Graph $\mathcal{L}(G) = (E, A)$ ist der Graph, dessen Knoten den Kanten von G entsprechen und der eine Kante zwischen zwei Knoten e und e' hat, wenn $e \cap e' \neq \emptyset$.

Example 15.6.

Ist G bipartit, dann ist eine Clique in $\mathcal{L}(G)$ ein Stern in G . (Ein Dreieck in $\mathcal{L}(G)$ entspräche zwar einem Dreieck in G , aber dies taucht in bipartiten Graphen nicht auf.) Eine Unabhängige Menge in $\mathcal{L}(G)$ entspricht einem Matching in G . Eine Cliquenzerlegung in $\mathcal{L}(G)$ entspricht einer Knotenüberdeckung (vertex cover) in G , und ein Färbung in $\mathcal{L}(G)$ entspricht einer Überdeckung von $E(G)$ mit Matchings. Diese Überlegungen implizieren folgendes:

1. $\kappa(\mathcal{L}(G)) = \alpha(\mathcal{L}(G)) \Leftrightarrow \min \text{ vertex cover} = \max \text{ Matching in } G$ (Satz von König-Egervary)
2. $\chi(\mathcal{L}(G)) = \omega(\mathcal{L}(G)) \Leftrightarrow \Delta(G) = \min \text{ Überdeckung von } E_G \text{ mit Matchings.}$
Dies kann man auch formulieren als: $\chi'(G) = \Delta(G)$ (Satz von König)

Da das PGT an vielen Stellen eine wichtige Rolle spielt, wollen wir diesen Satz nun auch beweisen.

15.2. Das Perfekt-Graph-Theorem.

Definition 15.7. Der Graph G ist *produkt-perfekt*, wenn für alle induzierten Subgraphen H gilt: $\alpha(H) \cdot \omega(H) \geq |V(H)|$ ist.

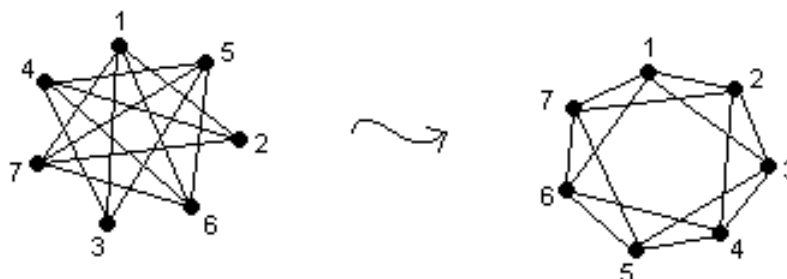


ABBILDUNG 136. $\overline{C_7}$ und eine Darstellung, die das Behauptete offensichtlicher macht

Theorem 15.8. Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) G ist ω -perfekt
- (2) G ist produkt-perfekt
- (3) G ist α -perfekt.

Beweis. Wir zeigen (1) \Leftrightarrow (2). Die Äquivalenz von (3) und (2) ist dual.

(1) \Rightarrow (2): Sei G ω -perfekt und H ein induzierter Subgraph. Insbesondere ist auch H ω -perfekt, weswegen wir H mit $\omega(H)$ Farben färben können. Sei S_1, \dots, S_ω also eine Partition in ω unabhängige Mengen. Für jedes S_i gilt $|S_i| \leq \alpha(H)$. Daraus folgt $|V(H)| = \sum_i |S_i| \leq \sum_i \alpha(H) = \omega(H) \cdot \alpha(H)$.

(2) \Rightarrow (1): (die schwierigere Richtung): Sei G produkt-perfekt. Angenommen G ist nicht ω -perfekt. Dann enthält G einen induzierten minimal imperfekten Subgraphen H . (D.h. H ist ein Subgraph, der nicht ω -perfekt ist, für den aber alle Subgraphen ω -perfekt sind.)

Wir werden gleich zeigen: wenn ein Subgraph H minimal imperfekt ist, impliziert das, dass $|V(H)| = \alpha(H)\omega(H) + 1$. Also ist G nicht produkt-perfekt. Widerspruch. \square

Example 15.9. Nach obiger Gleichung ist C_5 also ein minimal imperfekter Graph, denn $\alpha = 2, \omega = 2, n = 5$. Ebenso ist $\overline{C_7}$ minimal imperfekt: $\omega = 3, \alpha = 2, n = 7$.

Bleibt also noch, zu zeigen:

Lemma 15.10. Sei G minimal imperfekt. Dann gilt

$$|V(G)| = \alpha(G) \cdot \omega(G) + 1.$$

Gaspavian. Wenn wir einen beliebigen Graphen G und eine unabhängige Menge I betrachten, dann gilt für $G^- = G \setminus I$:

$$\chi(G) \geq \chi(G^-) \geq \chi(G) - 1$$

und

$$\omega(G) \geq \omega(G^-) \geq \omega(G) - 1.$$

Wenn G minimal imperfekt ist, dann gilt $\chi(G) > \omega(G)$ und für alle induzierten Subgraphen H gilt $\chi(H) = \omega(H)$.

Wir können also beide Aussagen kombinieren und erhalten: wenn G minimal imperfekt und I eine unabhängige Menge ist, gilt für G^-

$$\begin{aligned} \chi(G) &> \omega(G) \\ &\geq \quad \geq \\ \chi(G^-) &= \omega(G^-) \\ &\geq \\ \chi(G) - 1 \end{aligned}$$

Aus dem Diagramm erhalten wir also

$$\chi(G^-) = \chi(G) - 1$$

und

$$\omega(G^-) = \omega(G)$$

Sei G minimal imperfekt und v beliebig (v ist natürlich eine unabhängige Menge). Sei X_1, \dots, X_ω eine Färbung von $G \setminus v$ und Y eine ω -Clique von G .

Falls $v \notin Y$, dann ist $Y \cap X_i \neq \emptyset$ für alle i .

Falls $v \in Y$, dann gibt es ein eindeutiges i mit $Y \cap X_i = \emptyset$.

Betrachte die folgende Konstruktion: Sei S maximal unabhängig in G , also $|S| = \alpha(G)$. Für alle $v \in S$ sei S_1^v, \dots, S_ω^v ein Färbung von $G \setminus v$. Mit S sind das $\alpha(G) \cdot \omega(G) + 1$ unabhängige Mengen. Wegen der Schlussfolgerungen aus obigem Diagramm gilt $\omega(G \setminus S_i^x) = \omega(G)$ ist. Sei Q_i^x eine ω -Clique in $G \setminus S_i^x$. Wir erhalten

$$|Q_i^x \cap S_j^x| = 1$$

für alle $j \neq i$.

Also ist $x \in Q_i^x \cap S_j^x$ das einzige Element, das in beiden Mengen vorkommt. Es gilt für alle $y \neq x$ in S : $|S \cap Q_i^x| = 1$ und $y \notin Q_i^x$. Betrachten wir nun die $\omega + 1$ -Färbung $S_1^y, \dots, S_\omega^y, y$ von G . Wegen $y \notin Q_i^x$ gilt

$$|S_j^y \cap Q_i^x| = 1 \quad \forall j.$$

Auch zu S finden wir eine ω -Clique Q in $G \setminus S$ mit

$$|Q \cap S_i^x| = 1 \quad \forall x \in S, i = 1, \dots, \omega.$$

Insgesamt ist das eine Menge von $\alpha\omega + 1$ Cliques, denn zu jeder Menge S_i^x erhalten wir eine unabhängige Menge Q_i^x und zu S erhalten wir die unabhängige Menge Q .

Betrachten wir jetzt die folgenden Matrizen:

- I $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ Identität
- J $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ alles 1-Einträge
- A $(\alpha\omega + 1) \times n$, Zeilen = Inzidenzvektoren der unabhängigen Mengen S_i^x und S
- B $n \times (\alpha\omega + 1)$, Spalten = Inzidenzvektoren der Cliques Q_i^x und Q .

Wir erhalten dann die Gleichung

$$A \cdot B = J - I.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{rang}(J - I) &= \alpha\omega + 1 \\ &\leq \\ \text{rang}(A) &\leq n, \end{aligned}$$

d.h. $n \geq \alpha\omega + 1$. Andererseits ist $G \setminus v$ perfekt, d.h. $n - 1 \leq \alpha\omega$. □

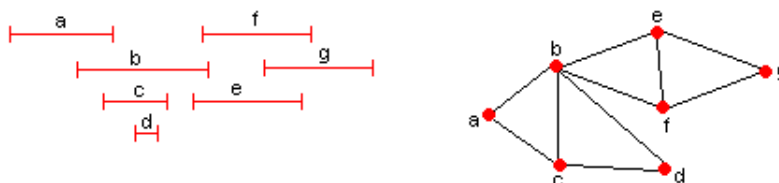


ABBILDUNG 137. Ein Intervallgraph und die entsprechende "übliche" Darstellung

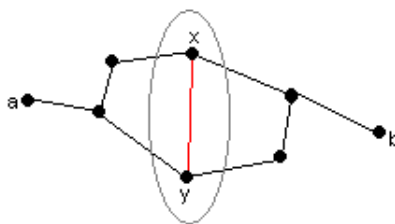


ABBILDUNG 138. a-b trennende Menge mit Kreis

15.3. **Triangulierte Graphen.** (Nicht zu verwechseln mit planaren Triangulierungen - maximal planaren Graphen!)

Definition 15.11. Ein Graph heißt trianguliert, wenn er keinen induzierten Kreis C_k mit $k \geq 4$ enthält.

Example 15.12. Es gilt z.B.

- **Bäume** sind triangulierte Graphen, weil sie überhaupt keine Kreise enthalten.
- **Cliquen**, also ein K_n sind trianguliert (induzieren höchstens Dreiecke)
- **Intervallgraphen** sind trianguliert. In einem Intervallgraphen entsprechen Knoten einem Intervall. Wenn sich zwei Intervalle überschneiden, dann sind die Knoten benachbart, d.h. es existiert eine Kante.

Sei a, b, c ein induzierter Pfad der Länge drei in der Intervalldarstellung. Also muss das Intervall b von den Intervallen a und c geschnitten werden. Außerdem sind a und c disjunkt. Dann folgt, dass a ganz links von c liegt, oder umgekehrt.

Betrachtet man einen längeren induzierten Pfad, z.B. $v_1v_2v_3v_4v_5$, dann kann man v_1 nicht mit v_5 verbinden, ohne die anderen Intervalle auch zu schneiden. Also hat jeder Kreis der Länge $k \geq 4$ eine Sehne. Man kann auf diese Weise keinen größeren Kreis als C_3 bekommen.

Lemma 15.13. Sei G ein triangulierter Graph. Dann ist jede $a - b$ trennende Menge eine Clique.

Beweis. Wir haben folgende Situation gegeben:

Betrachte einen Knoten x aus der minimal trennenden Menge S . Dann gilt: $\forall x \in S$ hat x einen Nachbarn in der $a-$ und in der $b-$ Komponente. Wenn $x, y \in S$, dann existiert ein Kreis, der x, y und Knoten aus beiden Komponenten enthält. Dieser Kreis der Länge $k \geq 4$ hat eine Sehne. Diese kann nicht zwischen Knoten auf beiden Seiten liegen, weil S trennend ist. Also gibt es entweder einen kürzeren Kreis, oder die Sehne liegt zwischen (x, y) . Wir können also den Kreis so lange verkürzen,

bis die Sehne wirklich zwischen (x, y) liegt. Dies gilt für alle Knotenpaare aus S . Damit ist S aber eine Clique. \square

Definition 15.14. Ein Knoten $v \in G$ heißt *simplizial*, wenn $N(v)$ eine Clique in G induziert.

Note 15.15. Das Wort simplizial leitet sich aus dem Wort Simplex ab. Betrachtet man das Skelett eines Simplex, dann induziert jeder Eckpunkt einen vollständigen Graphen. Der n -Simplex ist dabei definiert als die konvexe Hülle von $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 15.16. *Wenn ein Graph trianguliert ist, besitzt er einen simplizialen Knoten.*

Example 15.17. Bei Bäumen sind es die Blätter, bei Cliquen induziert jede Nachbarmenge eines Knotens einen vollständigen Graphen. Betrachte bei Intervallgraphen den am weitesten rechts liegenden linken Endpunkt bzw. den am weitesten links liegenden rechten Endpunkt. Diese beiden Knoten sind simplizial, weil alle Intervalle, die diesen hier "endenden" Knoten schneiden, sich auch paarweise schneiden müssen, weil ihre Endpunkte weiter rechts bzw. links liegen.

Beweis. Wir zeigen: entweder ist G Clique, oder G enthält zwei nicht benachbarte simpliziale Knoten.

Induktion: $n = 2$ klar

Induktionsschritt von $n - 1$ auf n : Entweder ist G eine Clique (dann sind wir fertig) oder es existieren a und b , die nicht benachbart sind. Sei S eine minimal $a - b$ trennende Menge, V_a und V_b die Komponenten von $G \setminus S$, die a und b enthalten. Definiere $G_a := G[V_a \cup S]$ und $G_b := G[V_b \cup S]$. Diese beiden Graphen sind trianguliert, weil induzierte Subgraphen triangulierter Graphen trianguliert sind. Auf G_a und G_b können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden. Wenn G_a eine Clique ist, wähle $v_a = a$. Andernfalls gibt es zwei simpliziale Knoten in G_a . Wähle $v_a \notin S$. Das ist möglich, weil S eine Clique ist, und die beiden simplizialen Knoten nicht benachbart sind. Wähle v_b analog. Dann folgt: v_a, v_b sind simplizial und nicht benachbart. \square

Definition 15.18. Eine perfekte Eliminationsreihenfolge (PER) eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Ordnung $\Lambda = (v_1, \dots, v_n)$ von V , so dass v_i simplizial in $G[v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n]$ ist.

Corollary 15.19. *Triangulierte Graphen besitzen eine PER.*

Beweis. Der Graph G hat einen simplizialen Knoten v_1 und $G \setminus v_1$ ist trianguliert. Also finden wir wieder einen simplizialen Knoten v_2 in $G \setminus v_2 \dots$. Auf diese Art erzeugen wir eine PER von v_1, \dots, v_n für G . \square

Example 15.20. In obigem Beispiel des Intervallgraphen erhalten wir die folgende Reihenfolge: a, d, c, b, e, g, f . (Betrachte der Reihe nach die rechten Endpunkte.)

Theorem 15.21. *Für einen Graphen G ist äquivalent:*

- (1) G ist trianguliert
- (2) Jede minimale $a - b$ trennende Menge ist eine Clique
- (3) G besitzt eine PER.

Beweis. (1) \Rightarrow (2) und (1) \Rightarrow (3) haben wir bereits gezeigt.

(2) \Rightarrow (1): Angenommen es existiert ein induzierter Kreis C der Länge größer gleich 4. Sei S minimal $a - b$ trennend. Dann enthält S auf beiden $a - b$ Pfaden von C mindestens einen Knoten. Da S eine Clique ist, muss C eine Sehne enthalten.



ABBILDUNG 139. v_i und seine Nachbarn

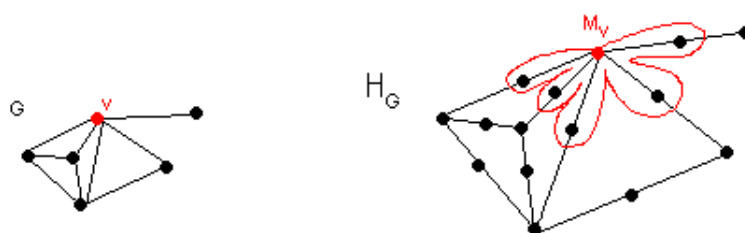


ABBILDUNG 140. G und der Hilfsgraph H_G mit zusätzlichen Knoten

(3) \Rightarrow (1): Sei $\Lambda = v_1, \dots, v_n$ eine PER. Angenommen es existiert ein induzierter Kreis C der Länge größer gleich 4. Betrachte diese Reihenfolge und den Kreis C darauf.

Sei v_i der linkeste Knoten von C in Λ . Die Nachbarn von v_i in C sind durch eine Kante verbunden, weil die Nachbarn von v_i eine Clique induzieren. Das ist eine Sehne im Kreis C . \square

Note 15.22. Eine PER kann in polynomialer Zeit gefunden werden (sogar in linearer Zeit). Das heißt, triangulierte Graphen lassen sich effektiv erkennen.

15.4. Durchschnittsgraphen. Sei $\mathcal{F} = \{M_1, \dots, M_n\}$ eine Familie von Mengen. Sie erzeugt einen Durchschnittsgraphen $G_{\mathcal{F}}([n], E)$, $i, j \in E$, wenn $M_i \cap M_j \neq \emptyset$.

Example 15.23.

- Intervallgraphen
- Jeder Graph ist auch ein Durchschnittsgraph. Die Konstruktion der Familie \mathcal{F} ist einfach:

Betrachte den Graphen G und einen Hilfsgraphen H_G , der auf jeder Kante einen Schnittknoten enthält. Jeder Stern, der von einem Knoten $v \in G$ induziert wird, ist nun eine Menge der Familie.

- Intervallgraphen sind Durchschnittsgraphen von Pfaden in einem Pfad.
- Jeder Graph ist Durchschnittsgraph von Sternen in einem Graphen.

15.4.1. *Baumgraphen.* Baumgraphen sind definiert als Durchschnittsgraphen von Bäumen in einem Baum.

Example 15.24.

Theorem 15.25. Ein Graph ist genau dann trianguliert, wenn er ein Baumgraph ist.

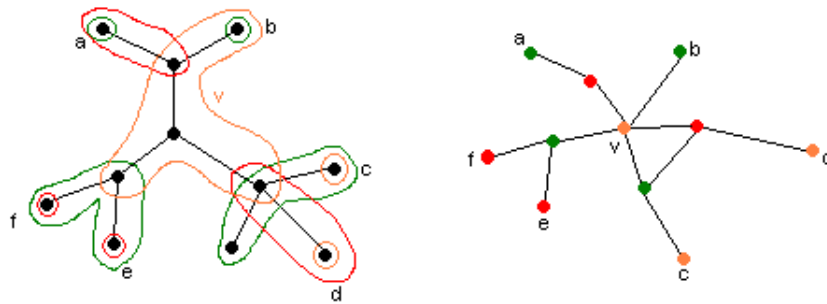


ABBILDUNG 141. Ein Baum und der aus den sich schneidenden Teilbäumen entstehende Baumgraph

Lemma 15.26. *Teilbäume eines Baumes haben die 1-Helly Eigenschaft. D.h. T_1, \dots, T_k Teilbäume von T mit $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ für alle i, j , dann gilt $\bigcap_{i=1}^n T_i \neq \emptyset$.*

Note 15.27. Helly-Eigenschaft: wenn für konvexe Mengen C_1, \dots, C_k in \mathbb{R}^d gilt: $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ für alle $I \in \binom{[k]}{d+1}$, dann gilt $\bigcap_i C_i \neq \emptyset$.

Beweis. Mit Induktion:

Der interessante Fall ist $k = 3$. Betrachte zwei Teilbäume T_1 und T_2 . Dann gilt $T \setminus (T_1 \cap T_2)$ ist unzusammenhängend. Außerdem hat jede Komponente einen nichtleeren Schnitt mit höchstens einem von T_1 und T_2 . Betrachte nun den Baum T_3 . Dieser schneidet T_1 und T_2 , kann also nicht in einer Komponente liegen. Also enthält er Teile des Schnittes.

Für den Induktionsschritt ersetze T_1 und T_2 durch $T_1 \cap T_2$. □

Das Lemma sagt uns in Bezug auf den Satz, wie Cliques in einem Baumgraphen aussehen.

Beweis. Beweisidee zum Satz:

1. Wenn G ein Baumgraph ist, dann zeigen wir, dass jede minimale $a - b$ trennende Menge eine Clique ist. Dabei ist die Idee: Wir haben disjunkte Teilbäume von a und b . Dann gibt es irgendeine Verbindung zwischen a und b . Ein Pfad ist dann eine Menge von Teilbäumen, deren Durchschnitte über den Pfad lappen. Haben wir dies gezeigt, dann impliziert es die Trianguliertheit von G .

2. Konstruiere induktiv eine Baumdarstellung. Wenn G eine Clique ist, dann sind wir fertig. Andernfalls betrachte a, b mit $(a, b) \notin E$ und eine $a - b$ trennende Clique S . Wir bauen eine Darstellung für G_a und für G_b . Die Clique S ist in der Darstellung von G_a und G_b durch einen Knoten repräsentiert (nach dem Lemma). □

Ein weiterer Beweis zum Helly-Satz für Bäume:

Proposition 15.28. *Seien T_1, \dots, T_k Teilbäume eines Baumes T und gilt $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ für alle i, j , dann gilt*

$$\bigcap_{i=1}^k T_i \neq \emptyset.$$

Beweis. Indirekter Beweis: angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es für alle Knoten $v \in T$ ein $i \in \{1, \dots, k\}$, so dass $v \notin T_i$. Betrachte eine Zuordnung $v \rightarrow T_i = T(v)$ mit $v \notin T(v)$. Zeichne dann für alle Knoten v die Kante an v aus, die in Richtung $T(v)$ weist.

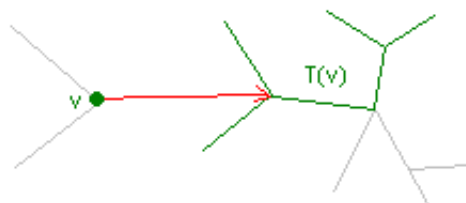


ABBILDUNG 142. Kante von v zu $T(v)$

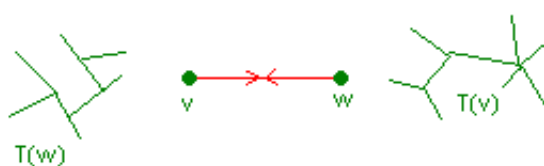


ABBILDUNG 143. Doppelt ausgezeichnete Kante

In einem Baum ist diese Kante eindeutig. Der Baum T hat n Knoten und $n - 1$ Kanten. Es gibt also eine Kante, die von beiden Endknoten ausgezeichnet wurde.

Also sind die beiden Teilbäume disjunkt. Damit erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme. \square

Theorem 15.29. *Triangulierte Graphen sind perfekt.*

Beweis. Sei G trianguliert und $\Lambda = (v_1, \dots, v_n)$ eine PER von G , d.h. für alle i ist v_i simplizial in $G[v_i, \dots, v_n]$. Betrachte die Greedy-Färbung mit der Reihenfolge $\bar{\Lambda} = (v_n, \dots, v_1)$. Nachdem in $\bar{\Lambda}$ die Nachbarn von v_i , die vor v_i kommen zusammen mit v_i eine Clique bilden, benutzt Greedy nur ω viele Farben. Also gilt

$$\chi(G) \leq \chi_{\text{Greedy } \bar{\Lambda}} = \omega(G).$$

Induzierte Subgraphen sind trianguliert, also folgt die Behauptung. \square

Definition 15.30. Ein Graph G ist ein PO-Graph, wenn es eine Reihung π der Knoten gibt, so dass für jeden induzierten Subgraphen H von G gilt:

Greedy($H, \pi|_H$) benötigt nur $\omega(H)$ viele Farben.

Note 15.31. Aus der Definition folgt sofort, dass PO-Graphen perfekt sind. Außerdem sehen wir etwa genauso schnell, dass triangulierte Graphen PO-Graphen sind, indem wir die umgekehrte PER nehmen. Eine PER eingeschränkt auf induzierte Subgraphen ist eine PER des Subgraphen.

Eine weitere Klasse der PO-Graphen ist die der Vergleichbarkeitsgraphen: Sei G ein Vergleichbarkeitsgraph von $P = (X, <)$. Wähle für π eine lineare Erweiterung von P , d.h. falls $x <_P y$ dann kommt x in π vor y .

Example 15.32. Vergleichbarkeitsgraphen und lineare Erweiterungen.

Greedy(G, π) gibt x die Farbe i , wenn x die Höhe i hat. D.h. es existiert eine Kette $x_1 < x_2 < \dots < x_i = x$. Eine solche Kette wird zu einer i -Clique.

Theorem 15.33. *Es gilt, dass π genau dann eine POReihung von G ist, wenn für jeden induzierten P_4 (4-Pfad) gilt, dass π den Pfad nicht als $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ orientiert, wobei $u \rightarrow v$ bedeutet, dass in π u vor v steht.*

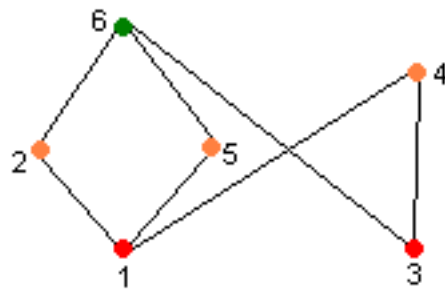


ABBILDUNG 144. Die Greedy-Färbung in Reihenfolge der linearen Erweiterung angewandt



ABBILDUNG 145. Greedy braucht drei Farben, obwohl eigentlich zwei reichen

Beweis. " \Rightarrow " ist einfach: Angenommen es existiert so ein P_4 . Dann schränke π auf die vier Knoten ein. Damit erhalten wir:
 und die Greedy-Färbung ist nicht optimal!
 " \Leftarrow " ist sehr technisch. Also sparen wir sie uns... □