5. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**
Graphentheorie 20. November 2003
Besprechung 27. November 2003

Färbungen, kritische Graphen

(25) Zeige, dass für alle Graphen

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

(26) Zeige für kritische Graphen $\chi(G) \leq \delta(G) + 1$ (wobei $\delta(G)$ den Minimalgrad in G bezeichnet).
Benutze diese Relation, um für kritische Graphen mit $\chi(G) \geq 2$

$$n \leq 2 \cdot \frac{m}{\chi(G) - 1}$$

zu zeigen.

(27) Als **Rad** W_n bezeichnen wir einen Graphen mit $n+1$ Knoten $v_0, \ldots, v_n$ und Kanten $v_0 v_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n, v_n v_1$. Ein Rad W_n heißt **gerade** bzw. **ungerade**, wenn n gerade bzw. ungerade ist.
Zeige, dass ein 4-kritischer Graph entweder selbst ein ungerades Rad ist oder keine Räder (weder gerade noch ungerade) als Teilgraphen enthält.

(28) Seien G und H zwei Graphen mit $e_1 = u_1 v_1 \in E(G)$ und $e_2 = u_2 v_2 \in E(H)$. Mit $G_{e_1} \perp_{e_2} H$ bezeichnen wir den Graphen, der durch Identifizieren von u_1 und u_2, Löschen von e_1 und e_2 und Hinzufügen der Kante $v_1 v_2$ entsteht.
Zeige, dass für zwei disjunkte k-kritische ($k \geq 3$) Graphen G und H für alle Kanten $e_1 \in E(G)$ und $e_2 \in E(H)$ der Graph $G_{e_1} \perp_{e_2} H$ ebenfalls k-kritisch ist.

Fraktionale Färbungen

(29) Gib jeweils ein Beispiel an, bei dem in folgenden Ungleichungen keine Gleichheit gilt:

a) $\chi_f(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$

b) $\omega(G) \leq \omega_f(G) = \chi_f(G) \leq \chi(G)$

(30) Berechne für das Rad W_n (s. Aufgabe 27) $\chi_f(W_n)$.