4. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Graphentheorie 13. November 2003

Besprechung 20. November 2003

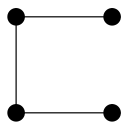
Unabhängigkeitszahl, Satz von Turán

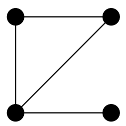
(19) Zeige, dass folgender Algorithmus eine unabhängige Menge von G bestimmt:

while $G \neq \emptyset$ **do**
  Wähle Knoten x von minimalem Grad in G
  $I := I \cup \{x\}$
  $G := G \setminus (N(x) \cup \{x\})$
return I

Zeige mit Hilfe dieses Algorithmus, dass $\alpha(G) \geq \sum_{v \in G} \frac{1}{d(v)+1}$ gilt.
(Hinweis: Betrachte, wie sich die Größe $A(G) := \sum_{v \in G} \frac{1}{d(v)+1}$ in jeder Iteration verändert; dabei steht $d(v)$ für den Grad von v im Inputgraphen, bleibt also im Laufe des Algorithmus unverändert).

(20) a) Zeige, dass ein Graph G genau dann vollständig multipartit ist, wenn er keinen induzierten Teilgraphen hat, der aus drei Knoten und einer Kante besteht.
b) Zeige damit, dass ein zusammenhängener Graph mit mindestens vier Knoten, der nicht vollständig multipartit ist, einen der folgenden Graphen als induzierten Teilgraphen hat.





(21) Zeige, dass für bipartite Graphen $\delta(G) + \Delta(G) \leq n(G)$ gilt.

(22) a) Zeige, dass aus $\sum\limits_{v \in G} \binom{d(v)}{2} > (l-1)\binom{n}{2}$ folgt, dass G einen $K_{2,l}$ enthält.
b) Zeige $\sum\limits_{v \in G} \binom{d(v)}{2} \geq m(2m/n - 1)$.

(23) Der Turán-Graph $T_{n,r}$ ist der vollständige r-partite Graph mit b unabhängigen Mengen der Größe $a+1$ und $r-b$ unabhängigen Mengen der Größe a, wobei $a = \lfloor n/r \rfloor$ und $b = n - ra$. Zeige $m(T_{n,r}) = (1 - 1/r)n^2/2 - b(r-b)/(2r)$.

(24) a) Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene, von denen keine zwei weiter als 1 entfernt sind. Zeige, dass die Anzahl der Paare von Punkten, die weiter als $1/\sqrt{2}$ entfernt sind, höchstens $m(T_{n,3}) = \lfloor n^2/3 \rfloor$ ist.
(Zeige dazu zunächst, dass es unter vier Punkten immer drei gibt, die einen Winkel von mindestens 90° einschließen).
b) Skizziere eine Verteilung von acht Punkten auf die Einheitsscheibe, bei der möglichst viele Punkte mindestens die Entfernung $1/\sqrt{2}$ haben.