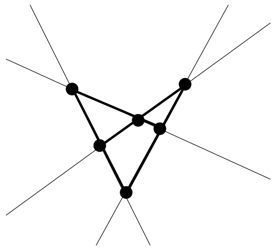
2. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Graphentheorie 29. Oktober 2003

Besprechung 6. November 2003

Färbungen

(7) Gegeben sei in der Ebene eine Menge von Geraden, von denen sich keine drei in einem Punkt schneiden. G sei der Graph mit den Schnittpunkten der Geraden als Knoten, wobei zwei Knoten adjazent seien, wenn sie auf einer der Geraden direkt aufeinanderfolgen. Zeige, dass $\chi(G) \leq 3$. (Kommentar: Die Folgerung ist i. A. falsch, wenn sich drei Geraden in einem Punkt schneiden dürfen.)



(8) Gegeben seien sechs Chemikalien $c_1, \ldots, c_6$; alle Reaktionen von je zwei der Chemikalien seien bekannt:
c_1 reagiert mit c_2 und mit c_4,
c_2 reagiert mit c_1 und mit c_6,
c_3 reagiert mit c_4, mit c_5 und mit c_6,
c_4 reagiert mit c_1 und mit c_3,
c_5 reagiert mit c_3,
c_6 reagiert mit c_2 und mit c_3.
Wie viele Behälter werden zum sicheren Transport der Chemikalien mindestens benötigt? (Können die Chemikalien so auf diese Behälter verteilt werden, dass der Transport absolut sicher ist?)

(9) Sei G ein Graph mit Knoten $v_1, \ldots, v_n$, die so sortiert seien, dass $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$. Zeige:

$$\chi(G) \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \min\{d(v_i) + 1, i\}.$$

(10) Sei G ein Graph und $z_k(G)$ die Anzahl der Färbungen von G mit k Farben. Zeige folgende Rekursionsformel:

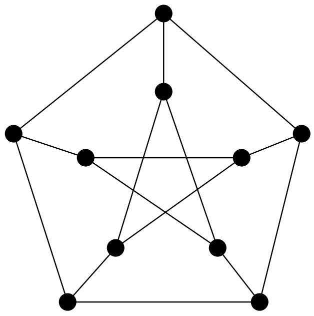
$$z_k(G) = z_k(G \setminus e) - z_k(G/e),$$

wobei $G \setminus e$ aus G durch Entfernen der Kante e und G/e durch Kontraktion von e, d. h. durch Entfernen von e, Identifikation der beiden Endknoten und Beseitigung der dadurch erzeugten Mehrfachkanten, entsteht.
Finde eine geeignete Menge von Graphen, die als Rekursionsanfang dienen kann und bestimme die Werte $z_k(G)$ für diese Graphen.

Planarität

(11) K_5 sei der vollständige Graph auf fünf Knoten, d. h. alle Knotenpaare sind durch eine Kante verbunden. Zeige, dass es keine kreuzungsfreie Einbettung (Zeichnung) des K_5 in die Ebene gibt.

(12) Zeige, dass es keine kreuzungsfreie Einbettung des Petersen-Graphen in die Ebene gibt. (Dabei kann die Aussage von Aufgabe 11 verwendet werden.)



Petersen-Graph