10. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**
Graphentheorie 8. Januar 2004
Besprechung 15. Januar 2004

Planare Graphen, Einbettungen, Euler-Formel

(55) Unter der *Taillenweite* eines Graphen G versteht man die Länge eines kürzesten Kreises in G.
a) Zeige für einen zusammenhängenden planaren Graphen G mit Taillenweite $g \geq 3$

$$m \leq (n-2) \cdot \frac{g}{g-2}.$$

b) Zeige damit, dass der Petersen-Graph auch nach Entfernung einer beliebigen Kante nicht planar ist.

(56) Zeige für Graphen mit mindestens 11 Knoten, dass der Graph selbst oder sein Komplement nicht planar sind.
(Bemerkung: Die Aussage gilt sogar für Graphen mit mindestens 9 Knoten. Dies wurde 1962 durch Betrachtung aller Graphen mit 9 Knoten bewiesen. Der hier gesuchte Beweis ist deutlich weniger umfangreich.)

(57) Bette den $K_{4,4}$ auf den Torus ein.

(58) Zeige, dass für auf dem Torus einbettbare zusammenhängende Graphen gilt:

$$n - m + f \in \{0, 2\}$$

a) Was folgt daraus für die maximale Kantenzahl solcher Graphen?
b) Untersuche damit, ob der $K_{4,5}$ auf dem Torus einbettbar ist.

(59) Zeige, dass jeder auf dem Torus einbettbare Graph 7-färbbar ist.

(60) Formuliere eine Aussage über die Knotengrade, die eine notwendige Bedingung dafür darstellt, dass eine planare Triangulierung 3-färbbar ist. Ist die angegebene Bedingung auch hinreichend?