6. Übung "Graphen, Zufall, Algorithmen" SoSe 2004

S. Felsner für Di. 25. Mai

(1) Seien $X_{i,j}$ unabhaängige Bernoullivariablen mit $p = 1/2$ (Münzwürfe). Für $i = 1, .., n$ sei $Z_i = \sum_{j=1}^{n} X_{i,j}$. Dann gilt mit $n \to \infty$:

- $\mathsf{Pr}\Big(\forall i = 1 \ldots n \text{ gilt: } \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} < Z_i < \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}\Big) \to 0.$

Hinweis: Aus der Stirling Formel folgt $\binom{n}{\frac{n}{2}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, 2^n$.

(2) Konstruiere einen *Intervallgraphen* G_n^I auf der Knotenmenge $[n]$ wie folgt: Zerlege $[2n]$ in n disjunkte Paare $\{a_i, b_i\}$, wobei $a_i < b_i$. Knoten i und j werden durch eine Kante verbunden wenn $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$.

- Wie viele Graphen G_n^I gibt es?
- Wie viele Graphen G_n^I sind unzusammenhängend?

(3) Sei G_n^I ein zufälliger Intervallgraph (gleichverteilt aus der in 2 beschriebenen Graphenmenge gezogen). Finde möglichts gute Abschätzungen für den Erwartungswert der folgenden Zufallsvariablen:

- $K :=$ #Kanten.
- $W := \omega(G_n^I)$, Cliquenzahl.
- $A := \alpha(G_n^I)$, Unabhängigkeitszahl.

(4) Sei X eine Menge mit n paarweise vergleichbaren Elementen.

- Wie viele Vergleiche benötigt man zur Auswahl des kleinsten und des größten Elements aus X.
- Wie viele Vergleiche benötigt man zur Auswahl des kleinsten und des zweitkleinsten Elements aus X.