5. Übung "Graphen, Zufall, Algorithmen" **SoSe 2004**

S. Felsner für Di. 18. Mai

(1) Sei T die Wartezeit für Cupon Collecting mit n Objekten. Was ist $\mathsf{Var}(T)$?

(2) Zeige: In der vom Gale-Shapley Algorithmus berechneten Hochzeit wird höchstens ein Mann mit der Frau die er am wenigsten mag verheiratet.

(3) Wie viele Anträge benötigt der Gale Shapley Algorithmus wenn alle Männer die gleiche Präferenzliste haben? Was ist wenn alle Frauen die gleiche Präferenzliste haben?

(4) Maximal- und Mimimalgrad eines Graphen seien mit Δ und δ bezeichnet. Zeige, dass für $G(n, \frac{1}{2})$ Graphen die Wahrscheinlichkeiten $\mathsf{Pr}(\Delta \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n})$ und $\mathsf{Pr}(\delta \geq \frac{n}{2} - \sqrt{n})$ Für $n \to \infty$ gegen Null gehen.

(5) Konstruiere einen zufälligen *Intervallgraphen* G_n^I auf der Knotenmenge $[n]$ wie folgt: Zerlege $[2n]$ in n disjunkte Paare $\{a_i, b_i\}$, wobei $a_i < b_i$. Knoten i und j werden durch eine Kante verbunden wenn $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$.

- Wie viele Kanten erwarten wir in G_n^I?
- Ist G_n^I zusammenhängend?
- Wie groß ist die maximale Clique von G_n^I?
- Wie groß ist die die maximale unabhängige Menge von G_n^I?

(6) Sei K eine konvexe Menge in der Ebene mit Fläche 1 und A die Fläche des von drei zufälligen Punkten aus D aufgespannten Dreiecks. Zeige, dass für $a \in [0, 1]$ gilt:

$$\mathsf{Pr}(A \leq a) \geq a.$$