4. Übung "Graphen, Zufall, Algorithmen" **SoSe 2004**

S. Felsner für Di. 11. Mai

(1) Entwerfe einen Algorithmus der zu gegegenem n und k eine gleichverteilte Permutation von $[n]$ mit k Zyklen erzeugt.

(2) Sei π eine Permutation mit c_k Zyklen der Länge k, für $k = 1,..,n$. Wie viel Zyklen der Länge k hat $\pi^2 = \pi \circ \pi$? Wie viel Zyklen der Länge k hat die inverse Permutation π^{-1}?

(3) Sei π eine Permutation mit c_k Zyklen der Länge k, für $k = 1,..,n$. Bestimme den Index γ von π, also die kleinste Zahl mit $\pi^\gamma = \mathsf{id}$?

(4) Sei $\left\{ {n \atop k} \right\}$ die Anzahl der Mengen-Partitionen von $[n]$ mit genau k Blöcken. Beispiel: Es gibt drei Partitionen von $[3]$ in zwei Blöcke $\{1\},\{2,3\}$ und $\{1,2\},\{3\}$ und $\{1,3\},\{2\}$. Zeige:

- $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \quad \text{und} \quad \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$
- $\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n \atop k} \right\}.$

(5) Sei $g_k(x) = \sum_{m \geq k} \left\{ {m \atop k} \right\} x^m$. Zeige mit Induktion:

$$\sum_{m \geq k} \left\{ {m \atop k} \right\} x^m = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-kx)}.$$

(6) Sei T die Wartezeit für Cupon Collecting mit n Objekten (Körben). Zeige:

$$\mathsf{E}(T) = \sum_m m \cdot \frac{n!}{n^m} \left\{ {m-1 \atop n-1} \right\}.$$

Und folgere

$$\mathsf{E}(T) = n! \left[\frac{d}{dx} \Big(\frac{x}{n} g_{n-1}(\frac{x}{n}) \Big) \right]_{x=1}.$$

(7) Mit (5), (6) und dem Logarithmen-Trick aus der Vorlesung kann man zeigen, dass $\mathsf{E}(T) = nH_n$. Führe das Argument aus.