3. Übung "Graphen, Zufall, Algorithmen" **SoSe 2004**

S. Felsner für Di. 4.Mai

(1) Für eine diskrete Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathrm{IR}$ gilt

- $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathsf{Pr}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \, \mathsf{Pr}(\omega).$

(2) Für zwei diskrete Zufallsvariable $X, Y : \Omega \to \mathrm{IR}$ gilt

- $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y).$

(3) Für zwei unabhängige diskrete Zufallsvariable $X, Y : \Omega \to \mathrm{IR}$ gilt

- $\mathsf{E}(X \cdot Y) = \mathsf{E}(X) \cdot \mathsf{E}(Y).$

(4) Für zwei unabhängige diskrete Zufallsvariable $X, Y : \Omega \to \mathrm{IR}$ gilt

- $\mathsf{Var}(X + Y) = \mathsf{Var}(X) + \mathsf{Var}(Y).$

(5) [Gesetz der großen Zahlen] Seien X_i unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie X. Für $\varepsilon, \delta > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon, \delta)$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ und $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ gilt

$$\mathsf{Pr}(|Z_n - \mathsf{E}(X)| \geq \delta) \leq \varepsilon.$$

(6) Für G mit n Knoten und m Kanten ermitteln sie ein möglichst großes $k = k(G)$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener minimaler Schnitt eine Folge von k Zufallskontraktionen überlebt zumindest 1/2 ist.

(7) In jedem Graphen G mit Minimalgrad $\delta(G) = k$ gibt es ein Paar von Knoten s, t, so dass der minimale (s, t)-trennende Schnitt in G mindestens k Kanten enthält.

(8) Sei $\left[{n \atop k}\right]$ die Anzahl der Permutationen von $[n]$ mit genau k Zyklen. Es gilt:

- $\displaystyle\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix},$
- $\displaystyle\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = n!,$
- $\displaystyle\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n! \, \mathsf{H}_n.$