2. Übung "Graphen, Zufall, Algorithmen" **SoSe 2004**

S. Felsner fällig Di. 27. April

(1) Für zwei Zufallsvariable $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

- $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y)$

(2) Für zwei unabhängige Zufallsvariable $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

- $\mathsf{E}(X \cdot Y) = \mathsf{E}(X) \cdot \mathsf{E}(Y)$

(3) Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Ein Zykel von π ist ein geordnetes Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ mit $\pi(i_1) = i_2$, $\pi(i_2) = i_3$, $\ldots$ $\pi(i_{k-1}) = i_k$ und $\pi(i_k) = i_1$. Für Permutationen mit der Gleichverteilung gilt:

$$\mathsf{Pr}(\text{ 1 liegt in einem Zykel der Länge } k\ ) = \frac{1}{n}.$$

(4) Sei $Z(\pi)$ die Anzahl der Zykel einer Permutation π. Bestimme $\mathsf{E}(Z)$ für Permutationen mit der Gleichverteilung. Hinweis: Betrachte die Zufallsvariablen

$$Y_i(\pi) = \frac{1}{\text{Länge des Zykels von } \pi \text{ in dem } i \text{ liegt}}.$$

(5) Für $G = (V, E)$ und $S \subseteq V$ gleichverteilt sei $X(S)$ die Anzahl der Kanten im Schnitt $(S, V \setminus S)$ [in der VL. haben wir $\mathsf{cut}(S)$ statt $X(S)$ geschrieben]. Bestimmen sie $\mathsf{E}(X^2)$.

(6) Für G mit n Knoten und m Kanten ermitteln sie ein möglichst großes $k = k(G)$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener minimaler Schnitt eine Folge von k Zufallskontraktionen überlebt zumindest 1/2 ist.