1. Übung "Graphen, Zufall, Algorithmen" **SoSe 2004**

S. Felsner fällig Di. 20. April

(1) (Inklusion–Exklusion) Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse, zeige

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{J \in \binom{[n]}{j}} \Pr\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right).$$

(2) Fünf verschiedenfarbige Tassen werden zufällig auf ihre Untertassen verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht keine Tasse auf ihrer Untertasse?

(3) Zwei Personen werfen eine faire Münze je n mal. Zeige,

$$\Pr(\text{ beide werfen gleich oft Kopf }) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}.$$

(4) Das TV-Spiel: Von drei geschlossenen Garagen enthält eine ein Auto, wenn der Kandidat errät welche, gehört das Auto ihm. Nachdem der Kandidat seine Wahl getroffen und bekanntgegeben hat, öffnet der Showmaster eine der beiden übrigen Garagen und zeigt, daß sie leer ist. Der Kandidat darf seine Wahl nun noch einmal überdenken. Soll er bei seiner Wahl bleiben oder wechseln?

(5*) (Gefangenen Paradox) Von drei Gefangenen a, b, c soll einer freigelassen und zwei hingerichtet werden, der Wächter weiß wer freikommt. Der Gefangene a erkennt seine Überlebenswahrscheinlichkeit ist 1/3, dann bittet er den Wärter um den Namen eines der anderen der hingerichtet wird und der Wärter antwortet b. Hat sich die Überlebenswahrscheinlichkeit von a durch diese Information auf 1/2 erhöht oder ist sie unverändert 1/3?

Hinweis: Betrachte die Strategie die der Wärter verwendet um die Antwort auszuwählen wenn mehrere Antworten möglich sind.

(6) (von Neumann Filter) Beschreibe eine Methode, mit der man aus der Kopf/Zahl Folge von Experimenten mit einer Münze mit Pr(Kopf) $= p$ eine (kürzere) Folge von fairen Zufallsbits erhält.

Hinweis: Betrachte Paare von aufeinanderfolgenden Würfen.

Aufgaben, die mit einem Stern versehen sind, sind freiwillig zu bearbeiten.