4. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**

Diskrete Geometrie 2 (DG II) 9. Mai 2018

Besprechungsdatum: 15./17. Mai

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

Erinnerung: Die Dualität oder auch Polarität am Einheitskreis ist wie folgt definiert: Einem Punkt P außerhalb des Einheitskreises wird die Gerade l_P durch die Schnittpunkte seiner Tangenten an den Einheitskreis zugeordnet. Einem Punkt P auf dem Einheitskreis wird die Tangente l_P zugeordnet, die den Einheitskreis in P tangiert. Einem Punkt P im Einheitskreis wird die Gerade zugeordnet, die durch alle dualen Punkte von Geraden durch P geht.

(1) (Aufgabe vom letzten Übungsblatt, erweiterte Bearbeitungszeit)
Sei P ein konvexes Fünfeck in der Ebene mit Ecken $v_1, ..., v_5$ in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn um $0 \in \overset{\circ}{P}$. Definiere für jede Kante v_i, v_{i+1} $\forall i \in [5]$ ($v_6 = v_1$) die Gerade l_i, die diese Kante enthält, und nenne den dualen Punkt dieser Geraden v_i'. Das ergibt dann insgesamt ein duales Polygon $P' = \text{conv}\left(\{v_1', ..., v_5'\}\right)$. In der letzten Übung zeigten wir $0 \in \overset{\circ}{P'}$.
Hinweis: Zeige, dass die duale Gerade zu p genau $D(p) = \{x | p^T x = 1\}$ ist.

- (a) Zeige, dass P' ein Fünfeck ist.
- (b) Zeige, dass das duale duale Fünfeck P'', also das duale Fünfeck zu P', wieder P ist ($P'' = P$).
- (c) Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Geraden, die P schneiden, also einen Punkt mit dem Inneren von P gemeinsam haben und $\mathcal{P}$ die Menge der dualen Punkte aller dieser Geraden. Zeige $\mathcal{P} \,\dot{\cup}\, P' = \mathbb{R}^2$.

(2) Gib eine Zahl für die Dimension n eines Vektorraums $\mathbb{R}^n$ an, in dem die Borsuk-Vermutung nicht gilt.

(3) Errechne $h(n)$ für $n \leq 5$. Konstruiere dafür die größtmöglichen (n, k, t)-Familien für alle $n > k > t \geq 0$.

(4) Sei $M \subset \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix und p prim. Zeige:

$$\text{rg}(M \bmod p) \leq \text{rg} M$$