3. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**

Diskrete Geometrie 2 (DG II) 3. Mai 2018

Besprechungsdatum: 8. Mai

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

---

(1) (Dualität am Einheitskreis, zählt wie zwei Aufgaben)
Sei P ein konvexes Fünfeck in der Ebene mit Ecken $v_1, ..., v_5$ in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn um $0 \in P$. Definiere für jede Kante v_i, v_{i+1} $\forall i \in [5]$ $(v_6 = v_1)$ die Gerade l_i, die diese Kante enthält, und nenne den dualen Punkt dieser Geraden v_i'. Das ergibt dann insgesamt ein duales Polygon $P' = \operatorname{conv}(\{v_1', ..., v_5'\})$.

(a) Zeige $0 \in P'$.

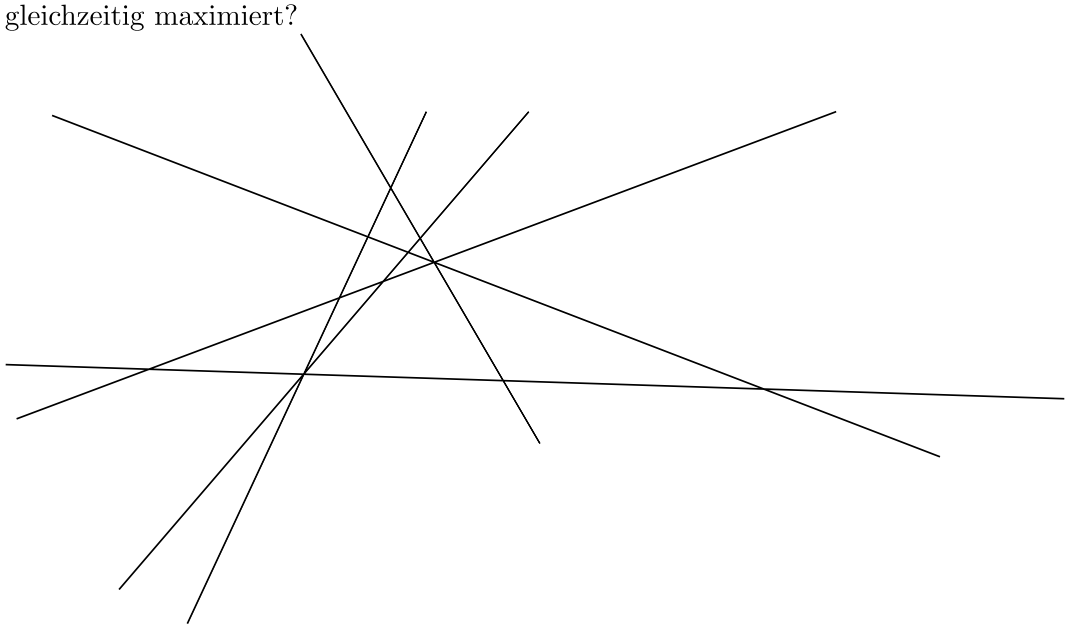
(b) Zeige, dass P' ein Fünfeck ist.

(c) Zeige, dass das duale duale Fünfeck P'', also das duale Fünfeck zu P', wieder P ist ($P'' = P$).

(d) Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Geraden, die P schneiden, also einen Punkt mit dem Inneren von P gemeinsam haben und $\mathcal{P}$ die Menge der dualen Punkte aller dieser Geraden. Zeige $\mathcal{P} \mathbin{\dot\cup} P' = \mathbb{R}^2$.

(2) Sei $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ die d-dimensionale Einheitssphäre. Man zeige, dass $\mathbb{S}^d$ ein regulärer, volldimensionaler Simplex mit Kantenlänge $\sqrt{\frac{2(d+2)}{d+1}}$ einbeschrieben werden kann.

(3) Sei $\mathcal{A}$ ein Geradenarrangement, also eine Menge von Geraden, die sich paarweise schneiden. Wie viele Kanten, Knoten, Zellen erhält man maximal, wenn $|\mathcal{A}| = n$? Wie viele davon sind unbeschränkt? Gibt es ein Arrangement, das alle Parameter gleichzeitig maximiert?



(4) (aus dem Beweis des Theorems von Hadwiger)
Man zeige, dass man $\mathbb{S}^{d-1}$ in $d+1$ Mengen $S_0, ..., S_d$ so partitionieren kann, dass $\operatorname{diam}(S_i) < \operatorname{diam}\left(\mathbb{S}^{d-1}\right) = 2$ $\forall i \in \{0, ..., d\}$.