2. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**

Diskrete Geometrie 2 (DG II) 20. April 2018

Besprechungsdatum: 3. Mai

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

---

(1) Beweise folgende schwächere Version des Center-Transversal-Theorems:
Zu $k \in [n]$ endlichen Mengen $A_1, ..., A_k \subset \mathbb{R}^n$ gibt es einen $(k-1)$-dimensionalen affinen Unterraum U, sodass jeder Halbraum, der U enthält, von jeder der endlichen Mengen mindestens einen relativen Anteil von $\frac{1}{n+1}$ der Punkte enthält. Formaler:

$$\forall i \in [k], H \text{ Hyperebene durch } U : |H^+ \cap A_i| \geq \frac{|A_i|}{n+1}$$

(2) Sei $\mathcal{L}$ eine Menge von n paarweise nicht parallelen Geraden in der Ebene, die nicht alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen (kein Stern), und X die Menge der Schnittpunkte von Geraden in L. Einen *gewöhnlichen (ordinary)* Punkt wollen wir als einen Punkt in X definieren, der auf genau 2 Geraden in $\mathcal{L}$ liegt.

(a) Man zeige, dass es mindestens einen gewöhnlichen Punkt gibt.

(b) Sei nun p_i die Anzahl Punkte, die auf genau i Geraden liegen, und q_i die Anzahl Regionen der Ebene, aufgeteilt durch die Geraden aus $\mathcal{L}$, mit genau i Seiten. Zeige:

$$\sum_{i=2}^{\infty}(3-i)p_i + \sum_{i=3}^{\infty}(3-i)q_i \geq 3$$

Folgere daraus eine Schranke an die Anzahl der gewöhnlichen Punkte in X.

(3) Es sei eine Menge X von $6k$ Punkten in der Ebene und ein weiterer Punkt z als Schnittpunkt von 3 Geraden l_1, l_2, l_3 so gegeben, dass die 6 Regionen $A_1, ..., A_6$, die durch die 3 Geraden definiert werden, jeweils k der Punkte von X enthalten.

(a) Man zeige, dass es $8k^3$ Dreiecke aus Punkten aus X gibt, die z enthalten.

(b) Tatsächlich kann man für jede $6k$-Punktmenge X in allgemeiner Lage eine solche Konfiguration von 3 sich in einem gemeinsamen Punkt schneidenden Geraden finden (Das muss nicht bewiesen werden). Was für Konsequenzen ergeben sich dadurch für die Konstante α_2 im Theorem von Bárány?

(4) Seien n Punkte unabhängig voneinander gleichverteilt auf dem Einheitskreis ausgewählt. Man bestimme den Erwartungswert der Anzahl der Dreiecke, die aus diesen Punkten gebildet werden können, sodass der Koordinatenursprung im Dreiecksinneren liegt.