12. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**

Diskrete Geometrie 2 (DG II) 04. Juli 2018

Besprechungsdatum: 10./12. Juli

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

---

(1) Beweise die Umkehrung des in der Vorlesung halb bewiesenen Lemmas:

Sei $f \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, dann existiert ein Polynom $g \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, sodass

$$\sum_{t \geq 0} f(t) z^t = \frac{g(z)}{(1-z)^{n+1}}.$$

Dabei gilt $g(1) \neq 0$ dann und nur dann, wenn der Grad von f genau n ist.

Hinweis: Stelle f in der Basis $\mathcal{B} = \left\{1, t+1, ..., \binom{t+n}{n}\right\}$ dar und nutze dann Induktion. Der Beweis kann auch über Eulerzahlen geführt werden.

(2) Sei $S \subset \mathbb{R}^d$ und $-S = \{-x | x \in S\}$. Zeige

$$\sigma_{-S}(z_1, ..., z_d) = \sigma_S\left(\frac{1}{z_1}, ..., \frac{1}{z_d}\right)$$

(3) Sei $\pi \in S_d$ beliebig und $\Delta_\pi = \text{conv}\left(0, e_{\pi(1)}, ..., \sum_{i=1}^d e_{\pi(i)}\right)$ ein Simplex zu π.

(a) Zeige, dass $\{\Delta_\pi | \pi \in S_d\}$ den Würfel $[0,1]^d$ trianguliert.

(b) Bestimme das Ehrhart-Polynom von Δ_π.

(c) Zeige, dass es Triangulierungen des Würfels (in 3 Dimensionen) mit 5 und mit 6 Tetraedern gibt.

Figure 1: Zwei verschiedene Ansichten der Δ_π-Triangulierung

(4) Nach Aufgabe (1) gibt es zu einem Polynom f festen Grades n eine rationale Funktion r, sodass

$$r(z) = \sum_{t \geq 0} f(t) z^t.$$

Im Folgenden wollen wir Potenzreihen wie diese mit r identifizieren. Zeige, dass in diesem Sinne für bel. k induktiv gilt:

$$\sum_{t \geq 0} t^k z^t = -\sum_{t < 0} t^k z^t.$$

Damit gilt auch $\sum_{t \in \mathbb{Z}} f(t) z^t = 0$.