1. Übungsblatt zur Vorlesung: **Felsner/ Schröder**

Diskrete Geometrie 2 (DG II) 20. April 2018

Besprechungsdatum: 24./26. April

`http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/DG2-SS18.html`

---

(1) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $a \in A$ fest. Sei a_t der Punkt, den man aus a erhält, wenn man A mit $t \in \mathbb{R}^n$ verschiebt. Man zeige die Konvexität von

$$C := \{a_t | (t + A) \cap B \neq \emptyset\}$$

(2) Es seien n Punkte in der Ebene so gegeben, dass je zwei von ihnen maximal Abstand 1 haben. Man zeige, dass sich ein Kreis mit Radius $r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ finden lässt, der alle Punkte überdeckt.

(3) Es seien $B_1, ..., B_n$ Boxen. Man zeige: Schneiden sich je zwei Boxen, so schneiden sich auch alle Boxen.
Erinnerung: Eine Box ist ein kartesisches Produkt von (eindimensionalen) Intervallen.

(4) Welche der folgenden Arten, das Helly-(1 bzw. 2)-Theorem zu verallgemeinern, stimmen?[1]

(a) Seien $A, X_1, ..., X_n \subset \mathbb{R}^2$ konvex, sodass für alle $i, j, k \in [n]$ gilt: $X_i \cap X_j \cap X_k$ enthält ein Translat von A. Dann enthält auch $\bigcap_{i=1}^n X_i$ ein Translat von A.

(b) Seien $X_1, X_2, , ... \subset \mathbb{R}^2$ konvex, sodass für alle $i, j, k \in [n]$ gilt: $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$. Dann gilt auch $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i \neq \emptyset$

(c) Seien $E_1, E_2, , ..., E_n \subset E$ Teilmengen der Kantenmenge eines Baumes $T = (V, E)$, sodass jedes $T_i = T(E_i) = (\bigcup E_i, E_i)$ ein Baum ist. Dann gilt mit $E_i \cap E_j \neq \emptyset \; \forall i, j \in [n]$ auch $\bigcap_{i \in [n]} E_i \neq \emptyset$.

(d) Seien $V_1, ..., V_n \subset V$ Teilmengen der Knotenmenge eines Baumes $T = (V, E)$, sodass jeder induzierte Teilgraph $T_i = (V_i, \{\{v, w\} \in E | v, w \in V_i\})$ ein Baum ist. Dann gilt mit $V_i \cap V_j \neq \emptyset \; \forall i, j \in [n]$ auch $\bigcap_{i \in [n]} V_i \neq \emptyset$.

(e) Beweise, dass alles Obige Verallgemeinerungen sind, also dass man jeweils das Helly-1-Theorem oder das Helly-2-Theorem aus einem Spezialfall folgern kann.

---

[1] Falls nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu Aufgaben auch zu beweisen