9. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Diskrete Strukturen I - Kombinatorik 20. Juni 2005

Abgabe: 27. Juni 2005

relevante Aufgabenzahl: **4**

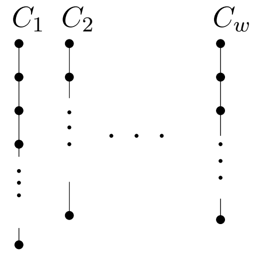
Young-Tableaux, lineare Erweiterungen

(54) (a) Zeige, dass die Höhe einer 2-dimensionalen Ordnung der Anzahl von Spalten des zugehörigen Young-Tableaus P entspricht.
(b) Zeige, dass die Weite einer 2-dimensionalen Ordnung der Anzahl von Zeilen von P entspricht.

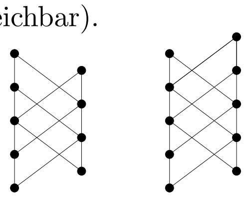
(55) Lösche die 1 aus einem Young-Tableau und verschiebe den kleineren der beiden Werte, die rechts daneben und darunter stehen, in das leer gewordene Feld. Wiederhole diesen Vorgang für das dadurch geleerte Feld sukzessive, bis ein Randfeld erreicht wird, und verringere schließlich alle Werte um 1. Zeige, dass dabei ein neues Young-Tableau entsteht. Zeige ausserdem, dass dieser Prozess bei Vorgabe des zuletzt geleerten Feldes eindeutig umkehrbar ist.

(56) Eine 2-Kette in einer partiellen Ordnung ist eine Teilmenge, die von 2 Ketten überdeckt wird. Finde eine partielle Ordnung, so dass für alle maximalen 2-Ketten $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$ weder C_1 noch C_2 maximal sind.

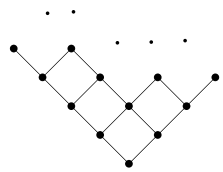
(57) Wie viele lineare Erweiterungen haben folgende Ordnungen?
(a) w paarweise disjunkte, unvergleichbare Ketten (versch. Länge)



(b) 2 Ketten $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_l$ mit $k = l$ oder $k = l + 1$ und $a_i < b_{i+1}$ für $1 \le i \le l - 1$ und $b_j < b_{j+2}$ für $1 \le j \le k - 2$ (und transitiv abgeschlossen, sonst unvergleichbar).



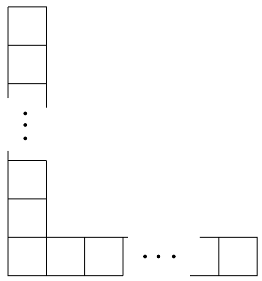
(c)



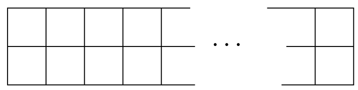
(endlich)

Hinweis: Die Anzahl der Young-Tableaux einer bestimmten Gestalt mit n Kästchen ist $n! \prod 1/h_z$, wobei h_z die Anzahl der Kästchen in einem Haken mit der Ecke z ist (Hook-Formel).

(58) Gib die Anzahl der Young-Tableaux folgender Gestalt an:
(a)



(b)



Hinweis zu (b): Finde eine Bijektion zur Anzahl binärer Klammerungen von Zeichenketten (s. Aufgabe 39) – oder zu einer anderen Familie, die von Catalan-Zahlen gezählt wird.

(59) Auf wie viele Arten können die Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ in Felder mit n Plätzen der folgenden Gestalt nach unten und nach rechts aufsteigend verteilt werden? Gib eine Rekursion an.