7. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Diskrete Strukturen I - Kombinatorik 6. Juni 2005

Abgabe: 13. Juni 2005

relevante Aufgabenzahl: **4**

Ordnungen, Satz von Dilworth, Catalan-Zahlen, Verbände

(38) Beweise die folgende duale Version des Satzes von Dilworth: in jeder Halbordnung ist die geringste Anzahl von Antiketten, die alle Elemente überdecken, gleich der Anzahl der Elemente in einer längsten Kette.

(39) Zeige, dass die Catalan-Zahlen

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

die Anzahl der binären Klammerungen einer Zeichenkette der Länge $n+1$ angeben.

(40) Zeige, dass es in einer symmetrischen Kettenzerlegung von $\mathcal{B}_n$ genau

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$$

Ketten der Länge $n-2k$ gibt.

(41) Sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung. Zeige, dass für zwei unvergleichbare $a, b \in M$ diese Halbordnung zu einer Totalordnung $(M, \leq')$ mit $a \leq' b$ erweitert werden kann.

(42) Sei A eine quadratische 01-Matrix mit k Einsen in jeder Zeile und in jeder Spalte. Zeige, dass sich A als Summe von k Permutationsmatrizen darstellen lässt. (Eine Permutationsmatrix ist eine quadratische Matrix, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins enthält.)

(43) Finde eine unendliche Halbordnung, in der jede Antikette endlich ist, die aber nicht durch endlich viele Ketten überdeckbar ist.

(44) Bestimme alle Verbände mit fünf Elementen, welche paarweise nicht isomorph sind. Zeichne die zugehörigen Hasse-Diagramme.

(45) Sei P eine Halbordnung der Höhe k. Zeige:
(a) $\forall x \in P\ \exists$ Kette der Länge k, die x enthält $\not\Rightarrow$ Alle max. Ketten sind k-Ketten.
(b) $\forall x, y \in P$ mit $x \prec y\ \exists$ Kette der Länge k, die x und y enthält
$\Longrightarrow$ Alle max. Ketten sind k-Ketten.
(“$x \prec y$” bedeutet, dass $x < y$ und dass kein Element zwischen x und y existiert).