6. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**
Diskrete Strukturen I - Kombinatorik 30. Mai 2005

Abgabe: 6. Juni 2005
relevante Aufgabenzahl: **4**

Satz von Hall, lexikographische Ordnungen

(32) Zeige: Für $k < \frac{n}{2}$ gibt es eine Paarung aller k-elementigen mit verschiedenen $(k+1)$-elementigen Teilmengen von $[n]$, bei der in jedem Paar die größere die kleinere Menge enthält.

(33) Angenommen, die Mengen $A_1, \ldots, A_r$ besitzen ein Repräsentantensystem. Zeige, dass dann ein A_j existiert, so dass es für jedes $a \in A_j$ ein Repräsentantensystem gibt, in dem A_j von a repräsentiert wird.

(34) In einem Land mit n Ehepaaren, wobei jeweils ein Partner Bauer, der andere Jäger ist, gibt es drei Ministerien, die schlecht miteinander kommunizieren. Das Landwirtschafts- und das Jagdministerium teilen unabhängig voneinander das Land in n gleich große Teile auf, um jedem Bauer bzw. Jäger ein Stück Land zuzuweisen. Das Familienministerium fordert nun eine Zuweisung, bei der sich für jedes Ehepaar die zugewiesenen Länder überschneiden. Gibt es immer eine solche Zuordnung?

(35) Betrachte eine Menge X mit zwei Partitionen $X = \cup_{i=1}^{n} X_i = \cup_{i=1}^{n} Y_i$, wobei $|X_i| = |Y_i| = r$ für alle i. Gibt es eine Teilmenge von X, die zugleich ein Repräsentantensystem für $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ und $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ darstellt.

(36) Konstruiere ein unendliches Gegenbeispiel zum Satz von Hall. Genauer: Finde einen bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ mit $A = B = \mathbb{N}$ und der Eigenschaft $|N(S)| \geq |S|$ für jedes $S \subseteq A$ und jedes $S \subseteq B$, so dass es kein Matching gibt, das alle Knoten enthält.

(37) Betrachte die 01-Folgen der Länge 10 (Positionen 0 bis 9) mit 4 Einsen.
(a) Welche 01-Folge steht in der lexikographischen Ordnung an der 37. Stelle, welche in der umgekehrt lexikographischen.
(b) An welcher Stelle steht die 01-Folge mit Einsen an den Positionen 2, 3, 7, 9 in der lexikographischen Ordnung, an welcher Stelle in der umgekehrt lexikographischen.