**5. Übung zur Vorlesung:** **Felsner/Baier**
**Diskrete Strukturen I - Kombinatorik** 23. Mai 2005
Abgabe: 30. Mai 2005
relevante Aufgabenzahl: **4**

## Inversionen, partielle Ordnungen

(26) (a) Zeige, dass die Anzahl der Paare $(X, Y)$ von Teilmengen einer $n$-elementigen Menge mit $X \subsetneqq Y$ gleich $3^n - 2^n$ ist.
(b) Beweise:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2^k - 1) = 3^n - 2^n$$

(27) Sei $\mathcal{A}$ eine sich schneidende Familie von Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit $|\mathcal{A}| = 2^{n-1}$. Für welche $n$ gibt es stets ein $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $x \in A \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$?

(28) Zeige, dass die folgenden Axiome die Inversionsmengen $A = \text{Inv}(\pi)$ von Permutationen $\pi \in S_n$ charakterisieren (d. h. notwendig und hinreichend sind):
(i) $A \subseteq \binom{[n]}{2}$
(ii) $\{a, b\} \in A \wedge \{b, c\} \in A \Longrightarrow \{a, c\} \in A$ für $a < b < c$
(iii) $\{a, b\} \notin A \wedge \{b, c\} \notin A \Longrightarrow \{a, c\} \notin A$ für $a < b < c$

(29) Das Produkt $P \times Q$ von partiellen Ordnungen $P = (M, \leq)$ und $Q = (N, \leq')$ ist definiert als $(M \times N, \leq'')$ mit $(m_1, n_1) \leq'' (m_2, n_2) \Longleftrightarrow m_1 \leq m_2$ und $n_1 \leq' n_2$.
In einer Multimenge sind alle Elemente mit einer ganzzahligen Vielfachheit enthalten. Für Multimengen $A$ und $B$ ist $A \subseteq B$ genau dann, wenn alle Elemente von $A$ in $B$ mit mindestens der gleichen Vielfachheit enthalten sind. Wie im Spezialfall einfacher Mengen ist auch hier durch die Teilmengenrelation eine partielle Ordnung definiert.
(a) Sei $K$ die Kette bestehend aus 0 und 1. Zeige, dass $\mathcal{B}_n$ isomorph ist zu $K^n = K \times K \times \cdots \times K$ ($n$ Faktoren).
(b) Betrachte Multimengen mit $n$ unterscheidbaren Elementen, die alle mit maximaler Vielfachheit $s$ auftreten. Sei $K_s$ eine Kette der Länge $s$. Zeige, dass die durch die Teilmengenrelation definierte partielle Ordnung isomorph ist zu $K_s^n = K_s \times K_s \times \cdots \times K_s$ ($n$ Faktoren).
(c) Drücke die durch die Teilerrelation auf den Teilern von 60 (unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit) bestimmte Ordnung als Produkt von Ketten und als Ordnung auf Multimengen aus.

(30) Sei $\mathcal{A}$ eine Antikette von Teilmengen von $[n]$, die $\alpha_i\binom{n}{i}$ Teilmengen der Größe $i$ enthält ($1 \leq i \leq n$). Sei $\mathcal{B} = \{B \subseteq [n] | A \subseteq B$ für ein $A \in \mathcal{A}\}$, und die Anzahl von Teilmengen der Größe $i$ in $\mathcal{B}$ sei $\beta_i\binom{n}{i}$. Zeige $\beta_{i+1} \geq \beta_i + \alpha_{i+1}$ für $i < n$.

(31) Seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen vom Betrag mindestens 1 und $I$ ein offenes reelles Intervall der Länge 1. Beweise, dass die Anzahl der Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i$ mit $\delta_i \in \{0; 1\}$, die in $I$ liegen, höchstens $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ist.