4. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Diskrete Strukturen I - Kombinatorik 9. Mai 2005

Abgabe: 16. Mai 2005

relevante Aufgabenzahl: **4**

Partitionen, Stirlingsche Zahlen, Polynombasen

(20) Unter dem Ferrers-Diagramm einer Partition versteht man ein Balkendiagramm, in dem man die Summanden absteigend nach Größe als Balken darstellt, deren Breite 1 und deren Höhe gleich dem Wert des Summanden ist.
(a) Zeige, dass die Anzahl der selbstkonjugierten Zahlpartitionen von n (d. h. das Ferrers-Diagramm hat die Diagonale als Symmetrieachse) gleich der Anzahl der Zahlpartionen von n ist, in denen alle Summanden ungerade und verschieden sind.
(b) Zeige, dass die Anzahl der Zahlpartitionen von n mit k Summanden gleich der Anzahl der Zahlpartitionen von $n + \binom{k}{2}$ mit k Summanden ist, die alle verschieden sind.

(21) Der Differenzenoperator $\mathbf{\Delta}$ wirkt auf einer Funktion f durch $\mathbf{\Delta} f(x) = f(x+1) - f(x)$ definiert. Durch Hintereinanderausführung des $\mathbf{\Delta}$-Operators erhält man induktiv die Formel

$$\mathbf{\Delta}^n f(x) = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ f(x+k)$$

Zeige diese Formel, indem du $\mathbf{\Delta}$ mit Hilfe des durch $\mathbf{E} f(x) = f(x+1)$ definierten Verschiebungsoperators $\mathbf{E}$ und des identischen Operators $\mathbf{1}$ ausdrückst.

(22) Beweise für die Stirlingschen Zahlen zweiter Art

$$S_{n,k} = \sum_{c_1+\cdots+c_k=n-k} 1^{c_1} 2^{c_2} \ldots k^{c_k}$$

und leite daraus die Ungleichungen $\sum_{i=1}^{k} i^{n-k} \ \leq\ S_{n,k} \ \leq\ \binom{n-1}{k-1} k^{n-k}$ ab.

(23) Beweise die Rekursion $S_{n+1,k+1} = \sum_i \binom{n}{i} S_{i,k}$ für die Stirlingschen Zahlen zweiter Art.

(24) Zeige für Folgen $(a_i), (b_i)$ folgende Äquivalenz:

$$a_n = \sum_k \binom{k}{n} (-1)^k\ b_k \iff b_n = \sum_k \binom{k}{n} (-1)^k\ a_k$$

Ist (a_i) der Koeffizientenvektor eines Polynoms p bzgl. der Polynombasis $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$, bzgl. welcher Polynombasis hat dann p den Koeffizientenvektor (b_i)?

(25) Zeige folgende formal der aus Aufgabe 24 ähnliche Äquivalenz:

$$a_n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k\ b_k \iff b_n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k\ a_k$$