3. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Diskrete Strukturen I - Kombinatorik 2. Mai 2005

Abgabe: 9. Mai 2005

relevante Aufgabenzahl: **4**

Permutationen, Inversionen, erzeugende Funktionen, Rekursionen

(14) n Menschen stehen nebeneinander in einer Reihe. Jetzt drehen sich zufällig manche um 90° nach rechts, die anderen nach links, so dass es Paare gibt, die sich in die Augen schauen. Nun drehen sich im Takt immer alle, die ihrem Gegenüber in die Augen schauen, um 180°. Kommen irgendwann alle zur Ruhe? Wenn ja, nach höchstens wie vielen Taktschlägen?

(15) Für die erzeugende Funktion der Inversionszahlen gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} I(n,k)x^k = \sum_{\pi \in S_n} x^{inv(\pi)} = \sum_{(a_1,\ldots,a_n);\ 0 \le a_i \le i-1} x^{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Zeige die letzte Gleichheit, indem du eine Bijektion ϕ zwischen den Vektoren $(a_1,\ldots,a_n)$ mit $0 \le a_i \le i-1$ und den Permutationen $\pi \in S_n$ angibst, bei der $\sum_{i=1}^{n} a_i = inv(\phi((a_1,\ldots,a_n)))$.

(16) Eine Permutation ist alternierend, falls kein Wert zwischen dem vorangehenden und dem nachfolgenden Wert liegt. Gib eine Rekursion für die Anzahl der alternierenden Permutationen ungerader Länge an, bei denen das zweite Element größer ist als das erste.

(17) Beweise den binomischen Leersatz in der speziellen Form $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, indem du für $x \in \mathbb{N}$ und festes n eine Bijektion zwischen zwei Mengen angibst, deren Kardinalitäten die linke bzw. rechte Seite der Gleichung sind.

(18) A und B werfen je n mal eine Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlickkeit, dass beide gleich oft Zahl geworfen haben (d. h. die Anzahl der Wurfmöglichkeiten, bei denen beide gleich oft Zahl geworfen haben, im Verhältnis zu allen 2^{2n} Wurfmöglichkeiten)?

(19) Die Fibonacci-Zahlen F_n sind definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Sei A die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zeige $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ und leite daraus $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ ab.