2. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**

Diskrete Strukturen I - Kombinatorik 25. April 2005

Abgabe: 2. Mai 2005

relevante Aufgabenzahl: **4**

Endliche Körper, projektive Ebenen, lateinische Quadrate

(9) $\mathbb{F}_q$ sei der endliche Körper mit q Elementen für Primzahlpotenzen q. Bestimme die Anzahl der ein- und zweidimensionalen Unterräume von $\mathbb{F}_q^k$.

(10) Zeige für endliche projektive Ebenen (P, G)

(a) Für $p \in P,\ g \in G$ mit $p \notin g$ gilt: # Geraden durch $p =$ # Punkte auf g.

(b) Zu verschiedenen $g, h \in G$ gibt es ein $p \in P$ mit $p \notin g \cup h$.

(c) Alle Geraden enthalten gleich viele Punkte. (Diese Anzahl sei $n + 1$; n ist die Ordnung von (P, G)).

(d) $|P| = |G| = n^2 + n + 1$.

(11) Sei $X = \mathbb{F}_2^k$. Betrachte die Menge $S := \{\ \{x, y, z, x + y + z\} \mid x, y, z \text{ versch. aus } X\ \}$. Beweise, dass jede 3-elementige Teilmenge von X in genau einer Menge aus S vorkommt. Wie viele Elemente enthält S?

(12) Sei $PG(q)$ die projektive Ebene über $\mathbb{F}_q$. Darunter versteht man die projektive Ebene, deren Punkte (Geraden) die ein-(zwei-)dimensionalen Unterräume des $\mathbb{F}_q^3$ sind. Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bilden ein Dreieck. Zeige, dass die Anzahl der Dreiecke $\frac{1}{6}\ q^3\ (q^2 + q + 1)\ (q + 1)$ ist.

(13) Definiere $Q_j(r, c) = rj + c\ \ (j \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\};\ r, c \in \mathbb{F}_q)$.
Zeige, dass sich so $q - 1$ (durch j indizierte) paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung q ergeben.