1. Übung zur Vorlesung: **Felsner/Baier**
Diskrete Strukturen I - Kombinatorik 20. April 2005

Abgabe: 25. April 2005
relevante Aufgabenzahl: **4**

Scheinbedingungen

Am Anfang jeder Übung gibt es eine Liste, in der alle die Aufgaben ankreuzen, die sie so weit bearbeitet haben, dass sie ihre Lösungen den anderen Teilnehmern in dieser Übung an der Tafel vorführen können. Für den Erwerb des Scheins müssen mind. 66% aller relevanten Aufgaben angekreuzt werden. Auf jedem Blatt ist die relevante Aufgabenanzahl des Blattes vermerkt. Diese Zahl kann auch maximal für dieses Blatt gewertet werden. Kann eine angekreuzte Aufgabe gar nicht oder nur unzureichend vorgeführt werden, so werden alle zu diesem Termin angekreuzten Aufgaben nicht gewertet.

Zusätzlich werden von jedem Studenten im Laufe des Semesters drei schriftliche Ausarbeitungen korrigiert; dies wird jeweils mit Ausgabe des Übungsblatts angekündigt. Die Bearbeitungen müssen die Lösung verständlich darstellen. Wird die Lösung einer zu bearbeitenden Aufgabe nicht gefunden, so kann evtl. in dieser Woche auf Wunsch eine andere Aufgabe bearbeitet werden, oder es ist statt dessen zu einem späteren Zeitpunkt eine andere Aufgabe zu bearbeiten.

Zählen

(1) (a) Zeige, dass es für $n > 0$ gleich viele gerade wie ungerade Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt.
(b) Beweise $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

(2) (a) Zeige $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$ für $r \leq n$ (Vandermonde-Identität).
(b) Zeige $\sum \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

(3) Im Winterschlussverkauf interessieren sich Arnold, Bertram und Carsten für die letzten Kleidungsstücke. Auf wie viele Arten können alle verbliebenen Kleidungsstücke auf die drei verteilt werden,
(a) wenn es sich um 5 ununterscheidbare T-Shirts handelt;
(b) wenn es um 5 verschiedenfarbige Unterhosen geht;
(c) wenn 5 ununterscheidbare T-Shirts und 5 verschiedenfarbige Unterhosen vorhanden sind?

(4) Berechne die ersten Glieder der Folge $\sum_k \binom{n-k}{k}$. Stelle eine Vermutung über eine rekursive Darstellung dieser Folge an. Kannst du sie beweisen?

(5) Sei D_n die Anzahl der Permutationen ohne Fixpunkt (Derangements). Beweise
(a) $D_n = (n-1)\ (D_{n-1} + D_{n-2})$ und
(b) $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ D_k$.

(6) Wir zeichnen 6 Punkte in die Ebene, so dass keine 3 davon auf einer Geraden liegen. 2 Spieler verbinden nun abwechselnd je 2 der Punkte mit einer Strecke in ihrer Farbe.

Der Spieler, der als erster ein Dreieck in seiner Farbe bildet, verliert. Kann es ein Unentschieden geben?

(7) Wie viele verschiedene Wörter kann man durch Permutation der Buchstaben aus ABRAKADABRA bilden?

(8) Die Felder eines 4 x 7 Schachbretts werden auf irgendeine Weise mit weiß und schwarz gefärbt. Zeige, dass es immer ein Rechteck gibt, dessen vier Eckfelder die gleiche Farbe haben. Stimmt dies auch für ein 4 x 6 Schachbrett?