12. Übung zur Vorlesung: **Felsner/ Heldt**
Algorithmische Geometrie (KG II) 23. Januar
Abgabe: 29. Januar

---

(1) Sei $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \in \mathbb{R}^2$ eine Menge von Sites in der Ebene. Weiterhin seien Hindernisse $O_1, \ldots, O_m \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben. Dabei sind die O_i paarweise disjunkte Polygone mit Ecken $q_{i,1} \ldots, q_{i,k_i}$. Weiterhin sei $O = O_1 \cup \cdots \cup O_m$ die Vereinigung der Hindernisse. Für $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash O$ definieren wir nun den Abstand

$$d(x, y) := \min \{|\gamma| : \gamma \text{ ist Pfad von } x \text{ nach } y \text{ mit } Bild(\gamma) \cap O = \emptyset\}$$

als Länge des kürzesten Weges zwischen x und y, der alle Hindernisse umschifft (den Rand der Polygone zählen wir dabei nicht als Hinderniss, der Pfad darf also die Kanten und Ecken der Polygone berühren).

(a) Zeige, dass d eine Metrik ist.

(b) Der Sichtbarkeitsgraph bezüglich O für eine Punktmenge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die Kotenmenge $V = P \cup \{q_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, k_i\}$ und die Kantenmenge $E = \{(x, y) \in V \mid \overline{xy} \cap O = \emptyset\}$. Es werden also genau die Knoten verbunden, deren Sicht aufeinander nicht durch die Hindernisse O_i blockiert werden. Die Kanten des Graphen werden mit dem euklidischen Abstand ihrer Knoten gewichtet. Zeige, dass für $x, y \in P$ der Abstand $d(x, y)$ durch die Kosten des kürzesten xy–Pfad im Sichtbarkeitsgraphen gegeben ist.

(c) Die Voronoiregion einer Site s ist wie üblich durch

$$V(s) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; d(x, s) \leq d(x, s') \;\forall s' \in S\right\}$$

definiert. Zeige, dass diese nicht leer sind und ihre Vereinigung die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus O$ überdeckt. Zeige, dass diese nicht zwangsläufig konvex sind und untersuche, welche Gestalt der Rand der Gebiete hat.

(d) Verwende die aus der Übung bekannten, additiv gewichteten Voronoidiagramme mit der Abstandsfunktion $d_{p_i}(x) := \|x - p_i\|_2 + w_i$ um die Voronoiregionen mithilfe von Kegeln im $\mathbb{R}^3$ zu beschreiben.

(e) Gib einen Sweep–Algorithmus an um das Voronoidiagramm für diesen Abstandsbegriff zu berechnen.

(2) Eine Supermarktkette hat in einem Stadtgebiet fünf Filialen von denen eine geschlossen werden sollen. Die Filialen sollen dabei derart ausgewählt werden, dass die Einzugsgebiete der verbleibenden Filialen in der Stadt möglichst gleich groß sind. Die Stadt kann dabei als das Quadrat $[0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2$ betrachtet werden. Die fünf Filialen sind an den Punkten $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right), \left(\frac{7}{10}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{10}\right)\right\}$ positioniert. Welche der Filialen sollte geschlossen werden?

(3) Diskutiere die Probleme bei der Modellierung der Verkehrssituation einer Innenstadt als Abstandsbegriff (unter Berücksichtigung von S– und U–Bahn Verbindungen und verschiedenen Geschwindigkeitsbegrenzungen sowie Hindernissen) um realistischere Einzugsgebiete für das Post Office Problem ermitteln zu können.