11. Übung zur Vorlesung: Algorithmische Geometrie (KG II) — **Felsner/ Heldt**, 15. Januar

Abgabe: 22. Januar

(1) Zeige, dass Voronoi Diagramme von n Punkten in der Ebene nicht schneller als $\Omega(n \log n)$ berechnet werden können.

(2) Sei $P = \{(0,0), (0,-6), (3,-3), (7,-3), (4,4), (-2,2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge.

(a) Zeichne das Voronoi Diagramm von P.

(b) Zeiche die Regionen

$$V_1(p_i) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p_i\|_1 < \|x - p_j\|_1 \quad \forall p_j \in P \setminus \{p_i\}\right\}$$

für alle $p_i \in P$, also die Voronoi Regionen bezüglich der Summennorm. Welche Gestalt hat der Rand derartiger Gebiete für eine allgemeine Punktmenge P'?

(c) Stelle die Regionen

$$V_\infty(p_i) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p_i\|_\infty < \|x - p_j\|_\infty \quad \forall p_j \in P \setminus \{p_i\}\right\}$$

zeichnerisch für alle $p_i \in P$ dar. Wie sieht in diesem Fall der Rand der Regionen einer Punktmenge P' aus?

(3) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ eine endliche Menge von n Punkten. Weiterhin seien $w_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$ gegeben. Für $p_i \in P$ und $x \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich damit ein Abstandsbegriff aus

$$d_{w_i}(x, p_i) := \|x - p_i\|_2^2 - w_i.$$

Dies führt zu den Gebieten

$$V(p_i) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_{w_i}(x, p_i) < d_{w_j}(x, p_j) \quad \forall p_j \in P \setminus \{p_i\}\right\}.$$

(a) Gilt stets $p_i \in V(p_i)$? Kann es p_i geben, so dass $V(p_i)$ leer ist?

(b) Zeige, dass der Rand von $V(p_i)$ aus Segmenten und Halbgeraden besteht.

(c) Beweise, dass $V(p_i)$ genau dann unbeschränkt ist, wenn p_i auf dem Rand von $conv(P)$ liegt.

(4) Der Gabriel Graph einer Punktmenge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ hat genau die Punktmenge selbst als Knoten. Desweiteren existiert zwischen p und q aus P genau dann eine Kante, wenn der Kreis, der p und q antipodal enthält (also derart, dass p und q ein antipodales Paar auf dem Rand des Kreises bilden) keine Punkte aus P im Inneren enthält.

(a) Zeige, dass die Delaunay Triangulierung von P den Gabriel Graph von P enthält.

(b) Weise nach, dass zwischen p und q aus P im Gabriel Graphen genau dann eine Kante existiert, wenn die Delaunay Kante zwischen p und q ihre duale Kante im Voronoi Diagramm schneidet.

(c) Beweise, dass der MST von P ein Teilgraph des Gabriel Graphen ist.