9. Übung zur Vorlesung: **Felsner/ Heldt**
Algorithmische Geometrie (KG II) 18. Dezember
Abgabe: 8. Januar

---

(1) Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene mit paarweise verschiedenen x–Koordinaten. Gib einen Algorithmus an, der in $O(n^2)$ Operationen diejenige Gerade g bestimmt, auf der die meisten Punkte aus P liegen.

(2) Der Weihnachtsmann verteilt bekanntermaßen üblicherweise gegen Ende Dezember eine größere Menge Geschenke. Da allerdings sein Schlitten nicht alle auf einmal tragen kann, muss er die Geschenke in mehreren Fahrten austeilen. Die Geschenke selbst sind aufgeteilt in kleine Geschenke (für brave Kinder) und Größere (für ganz brave). Die dritte Menge von Kindern erhält keine Geschenke. Hilf ihm, die Oberfläche der Erde in 2^k zusammenhängende Gebiete zu unterteilen, so dass in jedem Bereich circa $\frac{m}{2^k}$ der m kleinen Geschenke und in etwa $\frac{n}{2^k}$ der n großen Geschenke zu verteilen sind, damit der Schlitten effizient beladen werden kann. Ist es außerdem möglich dabei sicherzustellen, dass alle der zu überfliegenden Gebiete in etwa gleich groß sind?

(3) Bei der Problemstellung aus Aufgabe 3 dauert es, aufgrund der großen Anzahl von Kindern (und den sub-optimalen Rechenfähigkeiten der Elfen, die dem Weihnachtsmann bei dem Bestimmen der Gebiete helfen), relativ lang das Ergebnis zu bestimmen. Nun gibt es allerdings immer noch einige Kinder, deren Einordnung in die drei "Geschenk–Kategorien" kurz vor Weihnachten geändert werden muss. Kannst Du den Elfen helfen? Beschreibe eine Datenstruktur, die von der Einordnung unabhängig ist und dann für jede mögliche Zuordnung von Geschenken auf Kinder eine Unterteilung der Erde in Segmente erlaubt. Gib untere und obere Schranken für die Komplexität der Berechnungen (also des Aufstellen der Struktur und des Berechnens der Bereiche) an.

(4) Sei P eine Menge von n Punkten im $\mathbb{R}^d$, mit $d \in \{2, 3\}$. Ein α–Mittelpunkt von P ist ein Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ so, dass jede Halbebene die p enthält auch mindestens $\alpha \cdot n$ Punkte aus P enthalten sind.

   (a) Zeige. dass je 4 Punkte in der Ebene einen $\frac{2}{4}$–Mittelpunkt haben.

   (b) Untersuche, für welche α es in der Ebene und im Raum es α–Mittelpunkte gibt und geben kann.

   (c) Zeige, dass die Menge der Mittelpunkte einer beliebigen Punktmenge P beschränkt und konvex ist.