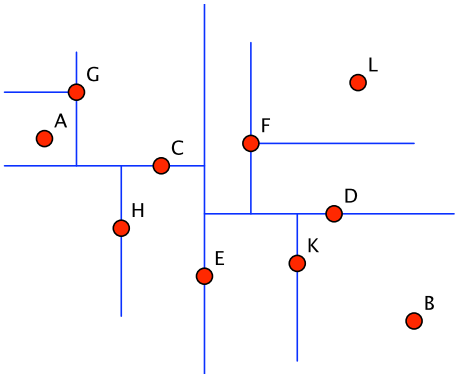
8. Übung zur Vorlesung: **Felsner/ Heldt**
Algorithmische Geometrie (KG II) 11. Dezember
Abgabe: 18. Dezember

(1) Eine alternative Datenstruktur, um Bereichsabfragen effizient zu beantworten, ist der KD–tree. Anstatt wie bei Range–trees eine x– und eine y–Struktur zu speichern, wird bei dieser Art von Bäumen abwechselnd in x und y Richtung getrennt.
Dazu wird der x Median der Punktmenge P bestimmt und die Punktmenge an diesem aufgeteilt. Für jede der zwei Teilmengen wird dann der y Median bestimmt und diese werden wieder aufgeteilt. Iterativ ergibt sich eine Aufteilung der Ebene in Bereiche, die jeweils nur ein Punkt enthalten. Die Mediane werden dabei stets der linken, respektive oberen, Teilmenge zugerechnet. Ein Beispiel einer solchen Aufteilung findet sich in der Abbildung.



(a) Wie kann mit dieser Datenstruktur effizient eine Bereichsabfrage von einem Achsen–parallelen Viereck beantwortet werden? Zeige, dass die Beantwortung einer Bereichsabfrage $O(\sqrt{n} + k)$ Operationen bei $|P| = n$ und k Punkten im angefragten Bereich dauert.

(b) Wieviel Speicher benötigen wir, um einen KD–tree zu speichern? Wie komplex ist das Aufbauen des Baumes?

(2) Anstatt die Punktmenge P mit einem Achsen–parallelen Viereck zu schneiden, wollen wir nun Bereichsanfragen stellen, bei denen der Bereich ein gleichseitiges Dreieck ist, dessen Grundseite parallel zur x–Achse ist.

(a) Können KD–Bäume und Range–trees verwendet werden, um diese Anfragen in sublinearer Zeit zu beantworten? Was für andere Arten von Bereichen können auch noch ohne Modifikationen abgefragt werden?

(b) Ist es möglich, Range–trees zu verwenden, um in polylogarithmischer Zeit derartige Anfragen zu beantworten?

(3) Nun wollen wir Bereichabfragen an eine sich verändernde Punktmenge stellen, dazu nehmen wir an, dass nach dem Erstellen der Datenstruktur weitere Punkte hinzugefügt werden.

(a) Wie kann ein Range–tree aktualisiert werden, wenn Punkte hinzugefügt werden? Wie effizient kann die Einfüge–Operation implementiert werden?

(b) Wie lassen sich KD–Bäume als online–Datenstruktur bei dem Einfügen weiterer Punkte realisieren?